Exercice 3 — 7 points

Afrique du Sud-Bulgarie-Comores-Djibouti-Kenya-Liban-Lituanie-Madagascar-Mozambique-Ukraine

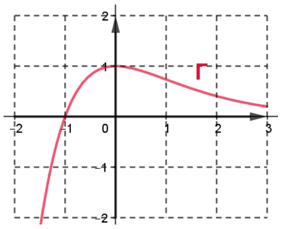
Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Fonctions - Suites

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre questions est exacte. Les six questions sont indépendantes.
Une réponde incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^{1000}+x$.
On peut affirmer que :
a. la fonction g est concave sur $\mathbb{R}$
b. la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$
c. la fonction g possède exactement un point d'inflexion
d. la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

2. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
On note Γ la courbe représentative de f' .
On a tracé ci-dessous Γ .



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
On peut affirmer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation :
a. $y=x$ **b.** $y=0$
c. $y=1$ **d.** $x=0$

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
On peut affirmer que la suite (u_n) est :
a. majorée et non minorée **b.** minorée et non majorée
c. bornée **d.** non majorée et non minorée

4. Soit k un nombre réel non nul.
Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n.
On suppose que $v_0=k$ et que pour tout n, on a $v_n \times v_{n+1}<0$.
On peur affirmer que v_{10} est :
a. positif **b.** négatif
c. du signe de k **d.** du signe de $-k$

5. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :
$w_{n+1}=2w_n-4$ et $w_2=8$.
On peut affirmer que :

a. $w_0=0$
b. $w_0=5$
c. $w_0=10$
d. il n'est pas possible de calculer w_0

6. On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par :
$a_{n+1}=\frac{e^n}{e^n+1}a_n$ et $a_0=1$.
On peur affirmer que :

a. la suite (a_n) est strictement croissante
b. la suite (a_n) est strictement décroissante
c. la suite (a_n) n'est pas monotone
d. la suite (a_n) est constante

7. Une cellule se reproduit en se divisant en deux cellules identiques, qui de divisent à leur tour et ainsi de suite.
On appelle temps de génération le temps nécessaire pour qu'une cellule donnée se divise en deux cellules.
On a mis en culture une cellule. Au bout de 4 heures, il y a environ 4000 cellules.
On peut affirmer que le temps de génération est environ égal à :

a. moins d'une minute
b. 12 minutes
c. 20 minutes
d. 1 heure

CORRECTION

1. Réponse : b

Preuve non demandée

$g(x)=x^{1000}+x \quad g'(x)=1000x^{999}+1 \quad$ et $\quad g''(x)=1000\times 999x^{998}$.

Pour tout nombre réel x : $x^{998}=(x^2)^{499}\geqslant 0$ donc $g''(x)\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Réponse : a

Preuve non demandée

Le coefficient directeur de la tangente T est égal à $f'(0)$.

Par lecture graphique : $f'(0)=1$.

Donc T est parallèle à la droite d'équation : $y=x$.

3. Réponse : c

Preuve non demandée

Si n est un entier naturel pair alors $(-1)^n=1$ et si n est un entier naturel impair alors $(-1)^n=-1$.

Donc pour tout entier naturel n $-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$ et $n+1>0$ donc $-\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{(-1)^n}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}$.

$n+1\geqslant 1$ donc $1\geqslant\frac{1}{n+1}$ et $-1\leqslant-\frac{1}{n+1}$.

Conséquence : $-1\leqslant-\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{(-1)^n}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}\leqslant 1$ et (u_n) est une suite bornée.

4. Réponse : c

Preuve non demandée

$k\neq 0$ et $v_0\times v_1<0 \Leftrightarrow k\times v_1<0$ donc v_1 est du signe de $-k$.

$v_1\times v_2<0$ donc v_2 est du signe de $-v_1$ soit du signe de k.

Si n est un entier naturel impair alors v_n est du signe de $-k$.

Si n est un entier naturel pair alors v_n est du signe de k.

Donc v_{10} est du signe de k.

5. Réponse : b

preuve non demandée

$n\in\mathbb{N} \quad w_{n+1}=2w_n-4$ et $w_2=8$.

Pour $n=1 \quad w_2=2w_1-4 \Leftrightarrow 8=2w_1-4 \Leftrightarrow 12=2w_1 \Leftrightarrow w_1=\frac{12}{2}=6$.

Pour $n=0 \quad w_1=2w_0-4 \Leftrightarrow 6=2w_0-4 \Leftrightarrow 10=2w_0 \Leftrightarrow w_0=\frac{10}{2}=5$.

6. Réponse : b

Preuve non demandée

On peut facilement démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $a_n>0$.

Donc pour tout entier naturel n : $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e^n}{e^n+1}<1$. La suite (a_n) est strictement décroissante.

7. Réponse : c

Preuve non demandée

Soit T le temps de génération (exprimée en minute).

C'est à dire, au bout de T minutes il y a 2 cellules.

Au bout de $2T$ minutes il y a $2\times 2=2^2=4$ cellules.

Au bout de $3T$ minutes il y a $2\times 2^2=2^3=8$ cellules.

Au bout de nT minutes il y a 2^n cellules.

Or $2^{10}=1024 \quad 2^{11}=2048 \quad 2^{12}=4096 \quad 2^{13}=8192$

Au bout de 4 heures= 240 minutes il y a environ 4000 cellules donc $12\times T=240$.

$T=\frac{240}{12}=20$ minutes