Exercice 4 — 7 points

Afrique du Sud-Bulgarie-Comores-Djibouti-Kenya-Liban-Lituanie-Madagascar-Mozambique-Ukraine

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Fonction exponentielle - Fonction logarithme - Suites

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0;1]$ par : $f(x)=e^{-x}+\ln(x)$.

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0;1]$. On note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à]0;1], on a : $f'(x)=\dfrac{1-xe^{-x}}{x}$.
3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0;1]$, on a $xe^{-x}<1$.
En déduire le tableau de variation de f sur $]0;1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel L appartenant à $]0;1]$ tel que $f(L)=0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{10} \\ b_0=1 \end{cases} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1}=e^{-b_n} \\ b_{n+1}=e^{-a_n} \end{cases}$$

1.a. Calculer a_1 et b_1. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
1.b. On considère ci-dessous la fonction termes écrite en langage Python.

```
def termes(n):
  a=1/10
  b=1
  for k in range(0,n):
    c= . . . .
    b= . . . .
    a=c
  return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites (a_n) et (b_n).
2. On rappelle que la fonction : $x \to e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$0<a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n\leqslant 1$.
2.b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
3. On note A la limite de la suite (a_n) et B la limite de la suite (b_n).
On admet que A et B appartienne à l'intervalle $]0;1]$ et que $A=e^{-B}$ et $B=e^{-A}$
3.a. Démontrer que $f(A)=0$.
3.b. Déterminer : $A-B$.

CORRECTION

Partie A

1. $x\in]0;1]$ $\quad f(x)=e^{-x}+\ln(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} e^{-x}=e^{-0}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

2. $x\in]0;1]$ $\quad (e^{-x})'=-e^{-x}$ $\quad \ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ donc $f'(x)=-e^{-x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-xe^{-x}}{x}$.

3. $0<x\leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; 0>-x\geqslant -1 \;\Leftrightarrow\; -1\leqslant -x<0$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\; e^{-1}\leqslant e^{-x}<e^{0} \;\Leftrightarrow\; e^{-1}\leqslant e^{-x}<1$

$0<e^{-1}\leqslant e^{-x}<1$ et $0<x\leqslant 1$ donc $0<xe^{-x}<1$.

On obtient $0<1-xe^{-x}$ c'est à dire $f'(x)>0$

$f(1)=e^{-1}+\ln(1)=e^{-1}$

Tableau de variation de f

x	0	1
f '(x)	+	
f(x)	$-\infty$ $\nearrow$	e^{-1}

4. f est dérivable sur]0;1], f est strictement croissante sur]0;1] à valeurs dans $]-\infty;e^{-1}]$, $0\in]-\infty;e^{-1}]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution L appartenant à]0;1].

Partie B

1.a. $a_1=e^{-b_0}=e^{-1}\simeq 0{,}37$ à 10^{-2} près.

$b_1=e^{-a_0}=e^{-0{,}1}\simeq 0{,}91$ à 10^{-2} près.

1.b.

```
def termes(n):
  a=1/10
  b=1
  for k in range(0,n):
    c= e^(-b)
    b= e^(-a)
    a=c
  return(a,b)
```

2.a. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $0<a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n\leqslant 1$.

- Initialisation

$a_0=0{,}1 \qquad a_1=e^{-1}\simeq 0{,}37 \qquad b_1=e^{-0{,}1}\simeq 0{,}91 \qquad b_0=1$

On a donc : $0<a_0\leqslant a_1\leqslant b_1\leqslant b_0\leqslant 1$.

La propriété est vérifiée pour n=0.

- <u>Hérédité</u>

  Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $0<a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n\leqslant 1$ et on doit démontrer que $0<a_{n+1}\leqslant a_{n+2}\leqslant b_{n+2}\leqslant b_{n+1}\leqslant 1$.

  La fonction : $x\rightarrow e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc :

  Si $0<a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n\leqslant 1$ alors $e^{-0}>e^{-a_n}\geqslant e^{-a_{n+1}}\geqslant e^{-b_{n+1}}\geqslant e^{-b_n}\geqslant e^{-1}$

  $e^0=1$ $e^{-a_n}=b_{n+1}$ $e^{-a_{n+1}}=b_{n+2}$ $e^{-b_{n+1}}=a_{n+2}$ $e^{-b_n}\,a_{n+1}$ $e^{-1}\simeq 0{,}37>0$

  donc $1>b_{n+1}\geqslant b_{n+2}\geqslant a_{n+2}\geqslant a_{n+1}\geqslant e^{-1}>0$ on obtient $0<a_{n+1}\leqslant a_{n+2}\leqslant b_{n+2}\leqslant b_{n+1}\leqslant 1$

- <u>Conclusion</u>

  Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $0<a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n\leqslant 1$.

2.b. Pour tout entier naturel n, on a $a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant 1$ donc la suite (a_n) est croissante et majorée par 1,
la suite (a_n) est donc convergente.
Pour tout entier naturel n, on a $0<b_{n+1}\leqslant b_n$ donc la suite (b_n) est décroissante et minorée par 0,
la suite (b_n) est donc convergente.

3.a. Pour tout nombre réel $x\in]0;1]$ $f(x)=e^{-x}+\ln(x)$
$A\in]0;1]$ $f(A)=e^{-A}+\ln(A)$ or $e^{-A}=B$ et $A=e^{-B}$ on a donc $\ln(A)=\ln(e^{-B})=-B$
et $f(A)=B-B=0$.

3.b. $f(B)=e^{-B}+\ln(B)$ or $e^{-B}=A$ et $B=e^{-A}$ on a donc $\ln(B)=\ln(e^{-A})=-A$
et $f(B)=A-A=0$.
Nous avons $f(A)=f(B)=0$ et nous avons démontré dans la question 4 de la partie A que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle]0;1] : L donc A=B=L et A-B=0.

