

## Exercice 1

7 points

Arabie saoudite – Bahreïn – Chypre – Éthiopie – Grèce – Israël – Jordanie – Koweït – Qatar – Roumanie – Turquie  
Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

### Thème: Fonction logarithme

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre questions est exacte. Les six questions sont indépendantes.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \ln(1+x^2)$ .

Sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = 2022$ .

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a. n'admet aucune solution         | b. admet exactement une solution   |
| c. admet exactement deux solutions | d. admet une infinité de solutions |

2. Soit la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  strictement positif par :  $g(x) = x \ln(x) - x^2$ .

On note  $\mathcal{C}_g$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

- |   |  |
|---|--|
| a. la fonction $g$ est convexe sur $]0; +\infty[$                                     | b. la fonction $g$ est concave sur $]0; +\infty[$  |
| c. la courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion sur $]0; +\infty[$ | d. la courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion sur $]0; +\infty[$ |

3. On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1; 1[$  par  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ .

Une primitive de la fonction  $f$  est la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $] -1; 1[$  par :

- |  |                                      |
|--|--------------------------------------|
| a. $g(x) = \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$                           | b. $g(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$  |
| c. $g(x) = \frac{x^2}{2 \left( x - \frac{x^3}{3} \right)^2}$ | d. $g(x) = \frac{x^2}{2} \ln(1-x^2)$ |

4. La fonction  $x \rightarrow \ln(-x^2 - x + 6)$  est définie sur :

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| a. $] -3; 2[$      | b. $] -\infty; 6[$ |
| c. $] 0; +\infty[$ | d. $] 2; +\infty[$ |

5. On considère la fonction  $f$  définie sur  $] 0; 5; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2 - 4x + 3 \ln(2x-1)$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1 est :

- |                      |                 |
|----------------------|-----------------|
| a. $y = 4x - 7$      | b. $y = 2x - 4$ |
| c. $y = -3(x-1) + 4$ | d. $y = 2x - 4$ |

6. L'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'inéquation  $\ln(x+3) < 2 \ln(x+1)$  est :

- |  |                        |
|--|------------------------|
| a. $S = ] -\infty; -2[ \cup ] 1; +\infty[$ | b. $S = ] 1; +\infty[$ |
| c. $S = \emptyset$                         | d. $S = ] -1; 1[$      |

## CORRECTION

### 1. Réponse : c

Preuve non demandée

$$f(x)=2022 \Leftrightarrow \ln(1+x^2)=2022 \Leftrightarrow 1+x^2=e^{2022} \Leftrightarrow x^2=e^{2022}-1$$

$$\Leftrightarrow (x=\sqrt{e^{2022}-1} \text{ ou } x=-\sqrt{e^{2022}-1})$$

### 2. Réponse : c

Preuve non demandée

$$x \in ]0; +\infty[ \quad g(x) = x \ln(x) - x^2$$

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 2x = \ln(x) + 1 - 2x$$

$$g''(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$$

Le signe de  $g''(x)$  sur  $]0; +\infty[$  est le signe de  $1-2x$ .

$$1-2x=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}=0,5$$

$$1-2x>0 \Leftrightarrow 1>2x \Leftrightarrow 0,5>x$$

$$1-2x<0 \Leftrightarrow 1<2x \Leftrightarrow 0,5<x$$

x	0	0.5	$+\infty$
$g''(x)$		+	0
convexité de g		convexe	concave

point d'inflexion

### 3. Réponse : a

Preuve non demandée

$$1-x^2>0 \Leftrightarrow x \in ]-1; 1[$$

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) \quad g \text{ est une primitive de } f \text{ sur } ]-1; 1[$$

### 4. Réponse : a

Preuve non demandée

$x$  appartient à l'ensemble de définition de la fonction si et seulement si :  $-x^2-x+6>0$ .

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) + 6 = 1 + 4 + 6 = 11 = 5^2$$

$$x_1 = \frac{1-5}{2 \times (-1)} = 2 \quad x_2 = \frac{1+5}{2 \times (-1)} = -3$$

Le coefficient de  $x^2$  est négatif donc !

$$-x^2-x+6>0 \Leftrightarrow x \in ]-3; 2[$$

### 5. Réponse : a

Preuve non demandée

$$x \in ]0,5; +\infty[ \quad f(x) = x^2 - 4x + 3 \ln(2x-1)$$

$$f(1) = 1 - 4 + 3 \ln(1) = -3$$

$$f'(x) = 2x - 4 + 3 \times \frac{2}{2x-1} = 2x - 4 + \frac{6}{2x-1}$$

$$f'(1) = -2 + \frac{6}{1} = 4$$

Équation de la tangente au point d'abscisse 1 :

$$y+3=4(x-1) \Leftrightarrow y=4x-7$$

## 6. Réponse : b

Preuve non demandée

$$\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$$

Ensemble de définition

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \end{cases}$$

$$\ln(x+3) < 2\ln(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \ln(x+3) < \ln(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x+3 < (x+1)^2 \end{cases}$$

$$x+3 < (x+1)^2 \Leftrightarrow x+3 < x^2+2x+1 \Leftrightarrow 0 < x^2+x-2$$

$$T(x) = x^2 + x - 2$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2 \times 1} = -2 \quad x_2 = \frac{-1+3}{1 \times 2} = 1$$

Le coefficient de  $x^2$  est positif.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
T(x)	+	0	-	0	+

On a aussi  $x > -1$

donc  $S = ]1; +\infty[$