Exercice 2 *7 points*

Arabie saoudite – Bahreïn – Chypre – Éthiopie – Grèce – Israël – Jordanie – Koweït – Qatar – Roumanie - Turquie

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géométrie de l'espace

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, considère les points :
A(2;0;3), B(0;2;1), C(-1;-1;2) et D(3;-3;-1).

1. Calcul d'un angle

1.a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1.b. Calculer les longueurs AB et AC.

1.c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

2. Calcul d'une aire

2.a. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

2.b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2.c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB) c'est à dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$.

2.d. Calculer l'aire du triangle ABC.

3. Calcul d'un volume

3.a. Soit le point F(1;-1;3). Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

3.b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

3.c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est le tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

CORRECTION

1.a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2\\2-0\\1-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-2\\-1-0\\2-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

1.b. $AB^2=(-2)^2+2^2+(-2)^2=4+4+4=12$ $AB=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$AC^2=(-3)^2+(-1)^2+(-2)^2=9+1+1=11$ $AC=\sqrt{11}$

1.c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-2\times(-3)+2\times(-1)+(-2)\times(-1)=6-2+2=6$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

donc $6=2\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\cos(\widehat{BAC})$ $\Leftrightarrow$ $\cos(\widehat{BAC})=\frac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{11}}=\frac{3}{\sqrt{33}}$.

En utilisant la calculatrice : $\widehat{BAC}=58,5°$

2.a. $M(x;y;z)$ $C(-1;-1;2)$ $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$

M appartient à $\mathscr{P}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}=0$ $\Leftrightarrow$ $-2\times(x+1)+2\times(y+1)-2\times(z-2)=0$

$\Leftrightarrow$ $-2x+2y-2z-2+2+4=0$ $\Leftrightarrow$ $-2x+2y-2z+4=0$ $\Leftrightarrow$ $-x+y-z+2=0$

$\mathscr{P}$: $-x+y-z+2=0$

2.b. (AB) : $\begin{cases}x=-2t+2\\y=2t+0\\z=-2t+3\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

2.c. On résout le système

$$\begin{cases}-x+y-z+2=0\\x=-2t+2\\y=2t\\z=-2t+3\end{cases}$$

On obtient : $-(-2t+2)+(2t)-(-2t+3)+2=0$ $\Leftrightarrow$ $2t+2t+2t-2-3+2=0$ $\Leftrightarrow$ $6t=3$ $\Leftrightarrow$

$t=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0,5$

$x=-2\times0,5+2=1$ $y=2\times0,5=1$ $z=-2\times0,5+3=2$

$E(1;1;2)$

2.d. CE est la hauteur du triangle ABC issue de C.

$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1+1\\1+1\\2-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ $CE^2=2^2+2^2+0^2=4+4=8$ $CE=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

L'aire du triangle ABC est égale à : $\frac{1}{2}\times AB\times CE=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}=2\sqrt{6}$ (en unité d'aire).

3.a. Les points A, B et C ne sont pas alignés donc les points a, B, C et F sont coplanaires si et seulement si le point F appartient au plan (ABC) c'est à dire s'ils existent deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{AF}=a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AC}$.

$A(2;0;3)$ $F(1;-1;3)$ $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A}\,a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AC}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}-1=-2a-3b\,(1)\\-1=2a-b\,(2)\\0=-2a-b\,(3)\end{cases}$

$\begin{cases} -1=-2a-3b \,(1) \\ -1=\;\;2a-\;b \,(2) \end{cases}$ on obtient : $-2=-4b \Leftrightarrow b=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

et $-1=2a-\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}=2a \Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$

On vérifie pour l'équation (3) : $-2a-b=-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

donc $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et les points A, B, C et F sont coplanaires.

3.b. $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{AB}=2\times(-2)+(-2)\times2+(-4)\times(-2)=-4-4+8=0$

$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{AC}=2\times(-3)+(-2)\times(-1)+(-4)\times(-1)=-6+2+4=0$

$\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\overrightarrow{FD}$ est un vecteur normal plan (ABC) et FD est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

$FD^2=2^2+(-2)^2+(-4)^2=4+4+16=24$ $FD=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

Le volume du tétraèdre ABCD est égal à :

$\frac{1}{3}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{6}=\frac{4\times6}{3}=8$ (en unité de volume).