## Exercice 3 — 7 points

**Arabie saoudite – Bahreïn – Chypre – Éthiopie – Grèce – Israël – Jordanie – Koweït – Qatar – Roumanie - Turquie**

*Le sujet propose 4 exercices.*
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et* ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
*Chaque exercice est noté sur 7 points ( le total sera ramené sur 20).*
*Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.*

**Thèmes: Fonction exponentielle et suites**

### Partie A

Soit $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=e^x-x$ .

**1.** Déterminer les limites de $h$ en $-\infty$ et $+\infty$ .

**2.** Étudier les variations de $h$ et dresser son tableau de variation.

**3.** En déduire que :
Si $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a<b$ alors $h(a)-h(b)<0$ .

### Partie B

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$ .
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

**1.** Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre $T$ et $\mathscr{C}_f$ au voisinage de zéro.
Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de $T$ et $\mathscr{C}_f$ de même abscisse.
On s'intéresse aux points d'abscisse $\frac{1}{n}$ , avec $n$ entier naturel non nul.
On considère alors la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non nul $n$ par :

$$u_n=\exp\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}-1 .$$

**2.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ .

**3.a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$u_{n+1}-u_n=h\left(\frac{1}{n+1}\right)-h\left(\frac{1}{n}\right)$$ où $h$ est la fonction définie à la partie A.

**3.b.** En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$ .

**4.** Le tableau ci-dessous donne les valeurs approchées à $10^{-9}$ près des premiers termes de la suite $(u_n)$ .

| $n$ | $u_n$ |
|---|---|
| 1 | 0.718281828 |
| 2 | 0.148721271 |
| 3 | 0.062279092 |
| 4 | 0.034025417 |
| 5 | 0.021402758 |
| 6 | 0.014693746 |
| 7 | 0.010707852 |
| 8 | 0.008148453 |
| 9 | 0.006407958 |
| 10 | 0.005170918 |

Donner la plus petite valeur de l'entier naturel $n$ pour laquelle l'écart entre $T$ et $\mathscr{C}_f$ semble être inférieur à $10^{-2}$.

## CORRECTION

### Partie A

**1.** Pour tout nombre réel $x$, $h(x)=e^x-x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$.

Si $x>0$ alors $h(x)=x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

**2.** $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$(e^x)'=e^x$ donc $h'(x)=e^x-1$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=\ln(1)=0$

$h'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$ (car exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ )

$h'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

$h(0)=e^0-0=1$

Tableau de variation

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| h '(x) | | $-$ | 0 | $+$ | |
| h(x) | $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

### Partie B

**1.** $h(0)=1$ et $h'(0)=0$ donc T: $y-1=0\times(x-0) \Leftrightarrow y=1$

T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A(0;1).

**2.** Pour tout nombre entier non nul $n$, $u_n=\exp\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}-1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\exp(x)=\exp(0)=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp\left(\dfrac{1}{n}\right)=1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1-0+1=0$.

**3.a.** Pour tout entier non nul $n$, $h\left(\dfrac{1}{n}\right)=\exp\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}$ donc $u_n=h\left(\dfrac{1}{n}\right)-1$.

$$u_{n+1}-u_n=h\left(\frac{1}{n+1}\right)-1-\left(h\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=h\left(\frac{1}{n+1}\right)-h\left(\frac{1}{n}\right).$$

**3.b.** $0<n<n+1$ donc $0<\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$ ( la fonction inverse et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ )

et $h\left(\dfrac{1}{n+1}\right)-h\left(\dfrac{1}{n}\right)<0$ on utilise la propriété démontrée à la question 3 de la partie A avec

$a=\dfrac{1}{n+1}$ et $b=\dfrac{1}{n}$. On obtient $u_{n+1}-u_n<0$ et la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

**4.** Le tableau donne $u_7=0{,}010707852>0{,}01$ et $u_8=0{,}008148453<0{,}01$

8 est la plus petite valeur de l'entier naturel $n$ pour laquelle l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ est inférieure à $10^{-2}$.