Exercice 1 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Fonction exponentielle

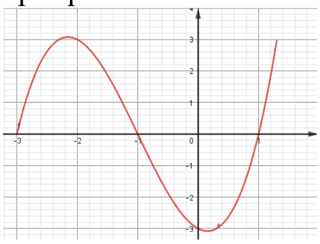
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune ded.s questions suivantes, une seule des quatre
questions est exacte. Les six questions sont indépendantes.
Une réponde incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. $f'(x)=e^{-x}$ **b.** $f'(x)=x e^{-x}$
c. $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ **d.** $f'(x)=(1+x)e^{-x}$

2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle [-1;3].
On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde f'' .



On peut affirmer que :
a. La fonction f est convexe sur l'intervalle [-1;1] **b.** La fonction f est concave sur l'intervalle [-2;0]
c. La fonction f' est décroissante sur l'intervalle [-2;0] **d.** La fonction f' admet un maximum pour $x=-1$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3e^{-x^2}$.
Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ alors :

a. $F(x)=-\dfrac{1}{6}(x^3+1)e^{-x^2}$ **b.** $F(x)=-\dfrac{1}{4}x^4e^{-x^2}$

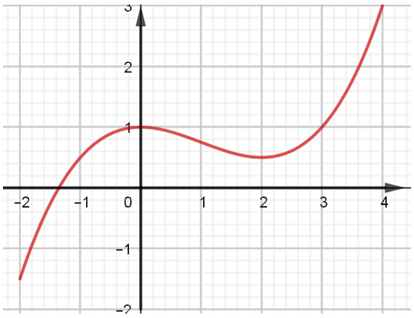
c. $F(x)=-\dfrac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}$ **d.** $F(x)=-x^2(3-2x^2)e^{-x^2}$

4. Que vaut : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

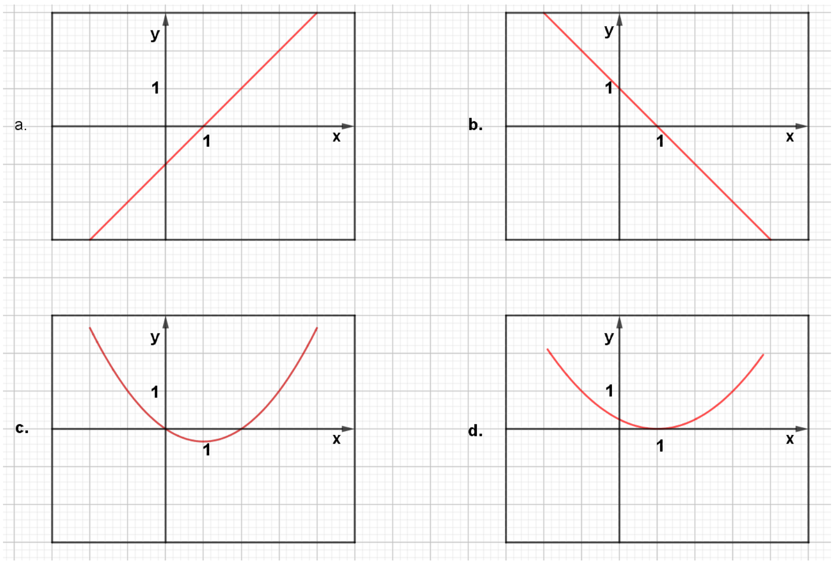
a. -1 **b.** 1
c. $+\infty$ **d.** n'existe pas

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x+1}$.
La seule primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que $F(0)=1$ est la fonction :
a. $x \to 2e^{2x+1}-2e+1$ **b.** $x \to 2e^{2x+1}-2$
c. $x \to \dfrac{1}{2}e^{2x+1}-\dfrac{1}{2}e+1$ **d.** $x \to e^{x^2+x}$

6. Dans un repère, on a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur [-2;4].



Parmi les courbes suivantes, laquelle, représente la fonction f'', dérivée seconde de f ?



CORRECTION

1. Réponse : c

Preuve non demandée

Pour tout nombre réel x, $\frac{1}{e^x}=e^{-x}$ et $f(x)=\frac{x}{e^x}=x\,e^{-x}$

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ donc $f'(x)=1\times e^{-x}+x\times(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

2. Réponse : d

Preuve non demandée

f'' est positive sur]-3 ;-1[; $f''(-1)=0$ et f'' est négative sur]-1;1[.

f' est croissante sur]-3 ;-1[et décroissante sur]-1;1[donc f' admet un maximum en -1.

3. Réponse : c

Preuve non demandée

Pour tout nombre réel x, $(e^{-x^2})'=-2x\,e^{-x^2}$.

Donc si on dérive les fonctions F de a, b et d on obtient un terme contenant une puissance de x strictement à 3.

Pour le c : $\left(-\frac{1}{2}(x^2+1)\right)'=-x$

$F'(x)=-x\,e^{-x^2}-\frac{1}{2}(x^2+1)(-2x\,e^{-x^2})=-x\,e^{-x^2}+(x^3+x)e^{-x^2}=x^3e^{-x^2}=f(x)$.

4. Réponse : b

Preuve non demandée

$\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{e^x(1+e^{-x})}{e^x(1-e^{-x})}=\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$

$\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ et $\lim_{X\to-\infty}e^X=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-1}=1$.

5. Réponse : c

Preuve non demandée

Pour tout nombre réel x, $(e^{2x+1})'=2e^{2x+1}$ donc $\left(\frac{1}{2}e^{2x+1}-\frac{1}{2}e+1\right)'=\frac{1}{2}(2e^{2x+1})=e^{2x+1}$

et $\frac{1}{2}e^{2\times0+1}-\frac{1}{2}e+1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e+1=1$ $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}-\frac{1}{2}e+1$.

6. Réponse : a

Preuve non demandée

Le signe de la fonction dérivée seconde détermine la convexité de la fonction

Par lecture graphique

a. $f''(x)<0$ sur $]-\infty;1[$ et $f''(x)>0$ sur $]1;+\infty[$

b. $f''(x)>0$ sur $]-\infty;1[$ et $f''(x)<0$ sur $]1;+\infty[$

c. $f''(x)>0$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]2;+\infty[$ et $f''(x)<0$ sur $]0;2[$

d. $f''(x)\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$

Or f est concave sur $]-\infty;1[$ et convexe sur $]1;+\infty[$ donc réponse a.