Exercice 2 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Fonction logarithme - suite

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x\ln(x)+1$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.

2.a. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x)=1+\ln(x)$.
2.b. En déduire le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.
On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f et les limites.
2.c. Justifier que pour tout $x\in]0;1[$, $f(x)\in]0;1[$.

3.a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
3.b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
3.c. En déduire que pour tout réel strictement positif : $f(x)\geqslant x$.

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0;1[$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=f(u_n)$.
4.a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0<u_n<1$.
4.b. Déduire de la question 3.c. la croissance de la suite (u_n) .
4.c. En déduire que (u_n) est convergente.

CORRECTION

1. $x \in]0;+\infty[\quad f(x)=x\ln(x)+1$

$\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x)=0$ (résultat de cours) donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x)=1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$.

2.a. $x \in]0;+\infty[\quad (\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}=\ln(x)+1$.

2.b. $1+\ln(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x)=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x)=\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1}{e}$

$1+\ln(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x)>-1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x)>\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x>\dfrac{1}{e}$

car ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$1+\ln(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad 0<x<\dfrac{1}{e}$.

$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)+1=-\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{e-1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f(x)	0	↘	$\frac{e-1}{e}$	↗	$+\infty$

2.b. Si $0<x\leqslant\dfrac{1}{e}$ alors $f(0)>f(x)\geqslant f\left(\dfrac{1}{e}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1>f(x)\geqslant\dfrac{e-1}{e}>0$

car f est strictement décroissante sur $]0;\dfrac{1}{e}]$.

Si $\dfrac{1}{e}<x<1$ alors $f\left(\dfrac{1}{e}\right)<f(x)<f(1) \quad \Leftrightarrow \quad 0<\dfrac{e-1}{e}<f(x)<1$

car f est strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{e};1\right[$.

donc si $x \in]0;1[$ alors $f(x) \in];0;1[$.

3.a. $A(1;1) \quad f'(1)=1 \quad$ T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

T: $\quad y-1=1\times(x-1) \qquad$ T: $\quad y=x$.

3.b. f' est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$f'(x)=1+\ln(x) \qquad f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$

f est convexe sur $]0;+\infty[$.

3.c. $\mathscr{C}_f$ est au dessus de toutes ses tangentes sur $]0;+\infty[$.

$\mathscr{C}_f$ est au dessus de T.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, le point $M(x;f(x))$ de $\mathscr{C}_f$ est au dessus du point $N(x;x)$ de T.

Donc $f(x)\geqslant x$.

4.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0<u_n<1$.

- Initialisation

  $0<u_0<1$ donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.

- Hérédité

  Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose $0<u_n<1$ et on doit démontrer que $0<u_{n+1}<1$.

  Si $0<x<1$ alors $0<f(x)<1$.

  Donc pour $x=u_n$, si $0<u_n<1$ alors $0<f(u_n)<1$ soit $0<u_{n+1}<1$.

- Conclusion

  Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $0<u_n<1$.

4.b. Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $x\leqslant f(x)$.

Pour $x=u_n$, $u_n\leqslant f(u_n)=u_{n+1}$ et la suite (u_n) est croissante.

4.c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc la suite (u_n) est convergente.