Exercice 4 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Probabilités

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.
On établit la règle du jeu suivante :
. un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
. un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
. un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et trois jetons blancs.

1.a. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

1.b. Calculer la probabilité de perdre 9€ sur une partie.

2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connaît pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.

2.a. Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.
Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

2.b. Résoudre l'inéquation pour x réel : $-x^2+30x-81>0$.

2.c. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.

2.d. Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

3. On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs).
Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 euros ?

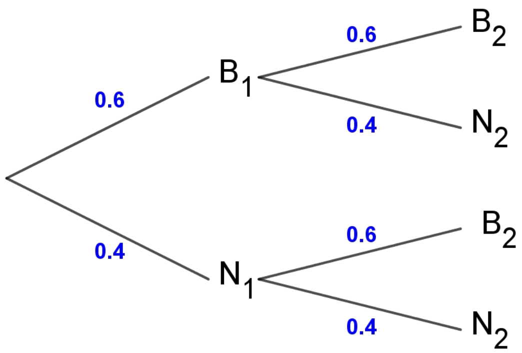
CORRECTION

1. on note :

. B_1 l'événement : « le 1[er] jeton tiré est blanc ».
N_1 l'événement : « le 1[er] jeton tiré est noir ».
Remarque : $N_1=\overline{B_1}$.
Dans l'urne il y a 5 jetons, 2 noirs et 3 blancs, donc $P(B_1)=\frac{3}{5}=0{,}6$ et $P(N_1)=\frac{2}{5}=0{,}4$.

. B_2 l'événement : « le 2[ème] jeton tiré est blanc ».
N_2 l'événement : « le 2[ème] jeton tiré est noir ».
Remarque : $N_2=\overline{B_2}$.
Les tirages sont effectués au hasard et avec remise.
Les tirages 1 et 2 sont indépendants.
$P_{B_1}(B_2)=P(B_2)=0{,}6$ $\quad P_{B_1}(N_2)=P(N_2)=0{,}4$ $\quad P_{N_1}(B_2)=P(B_2)=0{,}6$ $\quad P_{N_1}(N_2)=P(N_2)=0{,}4$

. On obtient l'arbre pondéré suivant :



1.b. La proba bilité de perdre 9 euros est : $P(B_1\cap B_2)$.
$P(B_1\cap B_2)=P(B_1)\times P(B_2)=0{,}6\times 0{,}6=0{,}36$

2. Le nombre de jetons dans l'urne est $N+3\geqslant 5$.
$P(B_1)=P(B_2)=\frac{3}{N+3}$ $\qquad P(N_1)=P(N_2)=\frac{N}{N+3}$.

2.a. Les valeurs de l'univers image sont : -9 ; -1 ; 5.
$$P(X=-9)=P(B_1\cap B_2)=\left(\frac{3}{N+3}\right)^2=\frac{9}{(N+3)^2}$$
$$P(X=-1)=P(N_1\cap N_2)=\left(\frac{N}{N+3}\right)^2=\frac{N^2}{(N+3)^2}$$
$$P(X=5)=1-\frac{9}{(N+3)^2}-\frac{N^2}{(N+3)^2}=\frac{(N+3)^2-9-N^2}{(N+3)^2}=\frac{6N}{(N+3)^2}$$
On donne la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

x_i	-9	-1	5
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{(N+3)^2}$	$\frac{N^2}{(N+3)^2}$	$\frac{6N}{(N+3)^2}$

2.b. $-x^2+30x-81>0$
$T(x)=-x^2+30x-81$ $\qquad \Delta=30^2-4\times(-1)\times(-81)=900-324=576=24^2$
$x_1=\frac{-30-24}{2\times(-1)}=\frac{54}{2}=27$ $\qquad x_2=\frac{-30+24}{-2}=3$
Le coefficient de x^2 est négatif.

Donc $T(x)>0 \Leftrightarrow x\in]x_2;x_1[\Leftrightarrow x\in]3;27[$

L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation : $-x^2+30x-81>0$ est $\mathscr{S}=\{3;27\}$.

2.c. $E(X)=-9\times\dfrac{9}{(N+3)^2}-1\times\dfrac{N^2}{(N+3)^2}+5\times\dfrac{6N}{(N+3)^2}=\dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$.

Le jeu est favorable au joueur si et seulement si $E(X)>0 \Leftrightarrow -N^2+30N-81>0$

$\Leftrightarrow$ N est un entier naturel solution de l'inéquation $-x^2+30x-81>0$

$\Leftrightarrow$ N est un entier naturel appartenant à l'intervalle [4;26]

2.d. Pour N jetons $(N\geqslant 2)$, le gain moyen du joueur est : $E(X)=\dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$.

Pour déterminer le nombre de jetons noirs pour avoir un gain maximal on étudie les variations de la fonction F définie sur $[2;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{-x^2+30x-81}{(x+3)^2}$.

$$F'(x)=\frac{(x+3)^2\times(-2x+30)-(-x^2+30x-81)\times 2(x+3)}{(x+3)^4}$$

$$F'(x)=\frac{(x+3)\times(-2x+30)-(-x^2+30x-81)\times 2}{(x+3)^3}$$

$$F'(x)=\frac{-2x^2+24x+90+2x^2-60x+162}{(x+3)^2}=\frac{-36x+252}{(x+3)^3}=\frac{-36(x-7)}{(x+3)^3}$$

F admet un maximum pour x=7 sur $[2;+\infty[$.

Pour avoir un gain moyen maximal, le joueur doit demander 7 jetons noirs dans l'urne.

3. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

Un joueur tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne contenant 10 jetons, 3 jetons blancs et 7 noirs.

Succès S : « le joueur tire deux jetons de couleurs différentes »

la probabilité de succès est : $p=\dfrac{6\times 7}{10}=0{,}42$.

Échec $\bar{S}$: « le joueur tire deux boules de même couleur »

la probabilité de l'échec est : $1-0{,}42=0{,}58$.

On observe 10 joueurs indépendants les uns des autres donc on effectue 10 épreues indépendantes.

On note A l'événement : « au moins 1 joueur parmi les 10 gagne 5 euros ».

$\bar{A}$ est l'événement « les 10 joueurs ne gagnent pas 5 euros ».

$P(\bar{A})=0{,}85^{10}\simeq 0{,}004$ au millième près.

$P(A)=1-P(\bar{A})\simeq 0{,}996$ au millième près.