Exercice 1 — 7 points

Afrique du Sud-Bulgarie-Comores-Djibouti-Kenya-Liban-Lituanie-Madagascar-Mozambique-Ukraine
Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Probabilités

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :
. un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de 25 ans ;
. un forfait SENIOR pour les autres.
Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge l'option coupe-file qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.

On admet que :
. 20 % des skieurs ont un forfait JUNIOR ;
. 80 % des skieurs ont un forfait SENIOR ;
. parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6 % choisissent l'option coupe-file ;
. parmi les skieurs ayant un forfait SENIOR, 12,5 % choisissent l'option coupe-file.

On interroge un skieur au hasard et on considère les événements :
. J **:** « le skieur a un forfait JUNIOR » ;
. C : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(J\cap C)$.
3. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
4. Le skieur a choisi l'option coupe-file. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un skieur ayant un forfait SENIOR ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.
5. Est-il vrai que les personnes de moins de vingt cinq ans présentent moins de 15 % des skieurs ayant choisi l'option coupe-file ? Expliquer.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
On considère un échantillon de 30 skieurs choisi au hasard.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi l'option coupe-file.

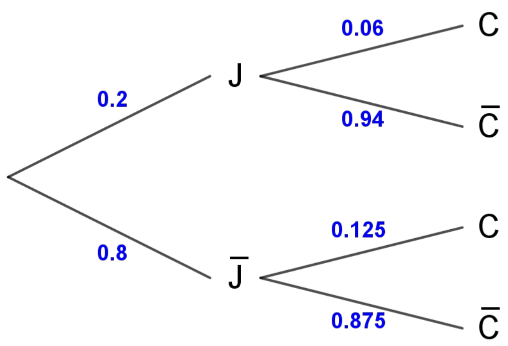
1. On admet que la variable aléatoire suit la loi binomiale.
Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.
Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité qu'au plus un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.
Arrondir le résultat à 10^{-3}.
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable X.

CORRECTION

Partie A

1. On note :
$\bar{J}$: « le skieur a un forfait Senior »
$\bar{C}$: « le skieur n'a pas choisi l'option coupe-file ».

- 20 % des skieurs ont un forfait JUNIOR
  donc $P(J)=0{,}2$ et $P(\bar{J})=0{,}8$
- parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR , 6 % choisissent l'option coupe-file
  donc $P_J(C)=0{,}06$ et $P_J(\bar{C})=1-0{,}125=0{,}875$.
- On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(J\cap C)=P(J)\times P_J(C)=0{,}2\times 0{,}06=0{,}012$

3. En utilisant la formule des probabilités totales.
$P(C)=P(J\cap C)+P(\bar{J}\cap C)$
$P(\bar{J}\cap C)=P(\bar{J})\times P_{\bar{J}}(C)=0{,}8\times 0{,}125=0{,}1$
$P(C)=0{,}012+0{,}1=0{,}112$

4. On nous demande de calculer $P_C(\bar{J})$
$P_C(\bar{J})=\dfrac{P(\bar{J}\cap C)}{P(C)}=\dfrac{0{,}1}{0{,}112}=0{,}893$ (arrondi à 10^{-3}).

5. $P_C(J)\simeq 1-0{,}893=0{,}107$
donc 10,7 % (inférieur à 15%) des skieurs ayant choisi l'option coupe-file sont des skieurs ayant le forfait JUNIOR.

Partie B

1. Pour un skieur le succès est de choisir l'option coupe-file. La probabilité de succès est $p=P(C)=0{,}112$.
On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard (c'est à dire de manière indépendante) donc la loi de probabilité de X est la binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0{,}112$.

2. Soit A l'événement : « au moins un des 30 skieurs a choisi l'option coupe-file ».
$\bar{A}$ est l'événement : <=les 30 skieurs n'ont pas choisi l'option coupe-file ».
$P(\bar{A})=(1-0{,}112)^{30}=0{,}888^{30}\simeq 0{,}028$ (arrondi à 10^{-3}).
$P(A)=1-0{,}028=0{,}972$.

3. Soit B l'événement : « au plus un des 30 skieurs a choisi l'option coupe-file ».
$P(B)=P(X=0)+P(X=1)$

$P(X=0)=,888^{30}\simeq 0{,}0283$ $P(X=1)=\binom{30}{1}\times 0{,}112\times 0{,}888^{29}=30\times 0{,}112\times 0{,}888^{29}\simeq 0{,}1072$

$P(B)=0{,}136$ (arrondi à 10^{-3}).

4. $E(X)=n\times p=30\times 0{,}112=3{,}36$.