Exercice 2 — 7 points

Afrique du Sud-Bulgarie-Comores-Djibouti-Kenya-Liban-Lituanie-Madagascar-Mozambique-Ukraine
Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Suites - Fonctions - Fonction logarithme

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre questions est exacte. Les six questions sont indépendantes.
Une réponde incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil.
Toutes les heures le volume d'eau diminue de 15 %.
Au bout de quel nombre entier d'heures le volume de l'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?

a. 2 heures **b.** 8 heures **c.** 9 heures **d.** 13 heures

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$, par : $f(x)=4\ln(3x)$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

a. $f(2x)=f(x)+\ln(24)-\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ **b.** $f(2x)=f(x)+\ln(16)$

c. $f(2x)=\ln(2)+f(x)$ **d.** $f(2x)=2f(x)$

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{\ln(x)}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet :

a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale
b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale
c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale
d. aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0;2]$ par :
$h(x)=x^2(1+2\ln(x))$.
On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère du plan.
On admet que h est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;2]$.
On note h' sa dérivée et h'' sa dérivée seconde.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;2]$, on a : $h'(x)=4x(1+\ln(x))$.

4. Sur l'intervalle $\left]\frac{1}{e};2\right]$, la fonction h s'annule :

a. exactement 0 fois **b.** exactement 1 fois
c. exactement 2 fois **d.** exactement 3 fois

5. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$, est :

a. $y=\left(6e^{\frac{1}{2}}\right)x$ **b.** $y=(6\sqrt{e})x+2e$

c. $y=6e^{\frac{x}{2}}$ **d.** $y=\left(2e^{\frac{1}{2}}\right)x-4e$

6. Sur l'intervalle $]0;2]$, le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_h$ est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3

7. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$ et $u_0=6$.

On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) est strictement croissante

b. la suite (u_n) est strictement décroissante

c. la suite (u_n) n'est pas monotone

d. la suite (u_n) est constante

CORRECTION

1. Réponse : c

Preuve non demandée

On note v_n le volume d'eau (en litre) dans le le récipient au bout de n heures ($n\in\mathbb{N}$).

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=v_n-\frac{15}{100}\times v_n=\frac{85}{100}v_n=0,85\,v_n$.

(v_n) est la suite géométrique de raison $q=0,85$ et de premier terme $v_0=1$.

Pour tout entier naturel n, $v_n=0,85^n$.

La suite (v_n) est décroissante.

Un quart de litre est égal à 0,25.

$v_2=0,85^2\simeq0,72>0,25$ $\quad$ $v_8=0,85^8\simeq0,27>0,25$ $\quad$ $v_9=0,85^9\simeq0,23<0,25$

Au bout de 9 heures le volume d'eau devient inférieur à un quart de litre.

2. Réponse : b

Preuve non demandée

$x\in]0;+\infty[$ $\quad$ $f(x)=4\ln(3x)$

$f(2x)=4\ln(3\times(2x))=4\ln(3\times(2x))=4[\ln(2)+\ln((3x))]=4\ln(2)+4\ln(3x)=\ln(2^4)+f(x)$

$f(2x)=f(x)+\ln(16)$

3. Réponse : c

Preuve non demandée

$x\in]0;+\infty[$ $\quad$ $g(x)=\frac{\ln(x)}{x-1}$

$g(x)=\frac{\ln(x)}{x-1}=\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{x}{x-1}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1$ donc $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$

$\mathscr{C}_g$ admet la droite d'équation $y=0$ comme asymptote horizontale.

$x>1$ $\quad$ $g(x)=\frac{\ln(x)}{x-1}=\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$

$g(x)$ est le taux d'accroissement de la fonction ln entre1 et x or ln est dérivable en 1 et $\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$

donc $\lim_{x\to1}g(x)=1$ et $\mathscr{C}_g$ n'admet pas d'asymptote verticale.

4. Réponse : b

Preuve non demandée

<u>1^{ère} méthode</u>

$x\in]0;2]$ $\quad$ $h(x)=x^2(1+2\ln(x))$ $\quad$ $h'(x)=4x(1+\ln(x))$

Le signe de $h'(x)$ est égal au signe de $1+\ln(x)$

$1+\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$1+\ln(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x)>-1=\ln\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

$\frac{1}{e}\in]0;2]$ donc h est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e};2\right]$ et $h\left(\frac{1}{e}\right)=1=\frac{1}{e^2}(1-2)=-\frac{1}{e^2}<0$ et

$h(2)=4(1+\ln(2))>0$. $0\in\left]\frac{1}{e};2\right]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que

l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{e};2\right]$.

2ème méthode

$x\in]0;2]$ $h(x)=x^2(1+2\ln(2))=0$ $\Leftrightarrow$ $1+2\ln(2)=0$ $\Leftrightarrow$ $\ln(x)=-\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

$1<e$ $\Leftrightarrow$ $e<e^2$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{e}<e$ (car la fonction racine carré est stricktemment croissante sur $]0;+\infty[$

la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc $\sqrt{e}<e$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{e}}>\frac{1}{e}$.

On a aussi $\frac{1}{\sqrt{e}}<2$ donc $\frac{1}{\sqrt{e}}\in]\frac{1}{e};2]$.

L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $\left]\frac{1}{e};2\right]$: $\frac{1}{\sqrt{e}}$

5. **Réponse :** **d**

<u>*Preuve non demandée*</u>

Rappel : $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$h(\sqrt{e})=e(1+2\ln(\sqrt{e}))=2e$ $h'(\sqrt{e})=4\sqrt{e}(1+\ln(\sqrt{e}))=4\sqrt{e}\left(1+\frac{1}{2}\right)=4\sqrt{e}\times\left(\frac{3}{2}\right)=6\sqrt{e}$.

Équation de la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point $A(\sqrt{e};2e)$.

$y-2e=(6\sqrt{e})(x-\sqrt{e})$ $\Leftrightarrow$ $y=(6\sqrt{e})x-6e+2e$ $\Leftrightarrow$ $y=(6e)x-4e$

6. **Réponse :** **b**

<u>*Preuve non demandée*</u>

$x\in]0;2]$ $f'(x)=4x(1+\ln(x))$ $h''(x)=4x(1+\ln(x))+4x\times\frac{1}{x}=4\times(2+\ln(x))$

Le signe de $h''(x)$ sur $]0;2]$ est le signe de $2+\ln(x)$.

$2+\ln(x)=0$ $\Leftrightarrow$ $\ln(x)=-2$ $\Leftrightarrow$ $x=e^{-2}$

$2+\ln(x)>0$ $\Leftrightarrow$ $\ln(x)>-2=\ln(e^{-2})$ $\Leftrightarrow$ $x>e^{-2}$

$2+\ln(x)<0$ $\Leftrightarrow$ $0<x<e^{-2}$

La fonction dérivée seconde de h s'annule une seule fois en changeant de signe sur]0;2] donc $\mathscr{C}_h$ admet un unique point d'inflexion sur]0;2].

7. **Réponse :** **d**

<u>*Preuve non demandée*</u>

$u_0=6$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$.

$u_1=\frac{1}{2}\times u_0+3=\frac{1}{2}\times 6+3=6=u_0$

On peut facilement démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n $u_n=6$.