Exercice 3 — 7 points

Afrique du Sud-Bulgarie-Comores-Djibouti-Kenya-Liban-Lituanie-Madagascar-Mozambique-Ukraine
Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Suites - Fonctions - Fonction exponentielle

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x)=1+x-e^{0,5x-2}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.

1.a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
1.b. Démontrer que,pour tout réel non nul, $f(x)=1+0,5x\left(2-\frac{e^{0,5x}}{0,5x}\times e^{-2}\right)$;

En déduire la limite en $+\infty$.

2.a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
2.b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x)<0$ est l'intervalle $]4+2\ln(2);+\infty[$.

3. En déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4+2\ln(2)$ par f.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle [-1;0].

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est la fonction définie dans la partie A.

1.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
1.b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera L la limite.

2.a. On rappelle que f vérifie la relation $f(L)=L$. Démontrer que L=4.
2.b. On considère la fonction valeur écrite ci-dessous dans le langage Python :

```
def valeur(a):
  u=0
  n=0
  while ≤ a:
    u=1+u-exp(0.5*u-2)
    n=n+1
  return n
```

L'instruction valeur(3,99) renvoie la valeur 12. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

Partie A

1.a. $f(x)=1+x-e^{0,5x-2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 0,5x-2=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{0,5x-2}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

1.b. $x\neq 0$ $\quad f(x)=1+0,5x\times 2-e^{0,5x}\times e^{-2}=1+0,5x\times\left(2-\dfrac{e^{0,5x}}{0,5x}\times e^{-2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 0,5x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{0,5x}}{0,5x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{e^{0,5x}}{0,5x}\times e^{-2}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 0,5x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2.a. $(e^{0,5x-2})'=0,5e^{0,5x-2}$ $\qquad f'(x)=1-0,5e^{0,5x-2}$

2.b. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1=0,5e^{0,5x-2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{0,5}=2=e^{0,5x-2} \Leftrightarrow \ln(2)=0,5x-2 \Leftrightarrow \dfrac{\ln(2)+2}{0,5}=x$

$\Leftrightarrow x=4+2\ln(2)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1<0,5e^{0,5x-2} \Leftrightarrow 2<e^{0,5x-2} \Leftrightarrow e^{\ln(2)}<e^{0,5x-2} \Leftrightarrow \ln(2)<0,5x-2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(2)+2}{0,5}<x \Leftrightarrow 4+2\ln(2)<x$

de même $f'(x)>0 \Leftrightarrow 4+2\ln(2)>x>0$

$f(4+2\ln(2))=1+4+2\ln(2)-e^{2+\ln(2)-2}=5+2\ln(2)-e^{\ln(2)}=5-2\ln(2)-2$

$f(4+2\ln(2))=3+2\ln(2)$

3. Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$4+2\ln(2)$		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	$3+2\ln(2)$	↘	$-\infty$

4. $f(0)=1-e^{-2}>0 \qquad f(-1)=-e^{-1,5}<0$

f est dérivable et strictement croissante sur [-1;0], f(-1)<0 et f(0)>0 donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution appartenant à l'intervalle [-1;0].

Partie B

1.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$.

- Initialisation

  $u_0=0 \quad u_1=f(0)=1-e^{-2}>0$ et $u_1<1\leqslant 4$ donc $u_0\leqslant u_1\leqslant 4$.

  La propriété est vérifiée pour n=0.
- Hérédité

  Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$ et on doit démontrer que : $u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 4$.

  f est croissante sur $]-\infty;;4+2\ln(2)[$ donc :

si $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ alors $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant 4$.
or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = 1+4-e^{2-2} = 5-e^0 = 5-1 = 4$
donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$.

. Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

1.b. Pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante et $u_n \leqslant 4$ donc la suite est majorée par 4.
Conséquence : la suite (u_n) converge.

2.a. $f(L) = L \Leftrightarrow 1+L-e^{0,5L-2} = L \Leftrightarrow 1 = e^{0,5L-2} \Leftrightarrow \ln(1) = 0,5L-2 \Leftrightarrow 0 = 0,5L-2$
$\Leftrightarrow 0,5L = 2 \Leftrightarrow L = \frac{2}{0,5} = 4$.

2.b. u_{12} est le premier terme de la suite (u_n) tel que $3,99 < u_n$.