Exercice 4 7 points

Afrique du Sud-Bulgarie-Comores-Djibouti-Kenya-Liban-Lituanie-Madagascar-Mozambique-Ukraine
Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: géométrie de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points A(5;0 ;-1), B(1;4 ;-1), C(1;0;3), D(5;4;3) et E(10;9;8).

1.a. Soit R le milieu de [AB].
Calculer les cordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
1.b. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan passant par R et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$.
1.c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathscr{P}_1$ et que EA=EB.

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x-z-2=0$.
2.a. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
2.b. On note Δ la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est : $\begin{cases} x= 2+t \\ y= 1+t \\ z= t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

3. On considère le plan $\mathscr{P}_3$ d'équation cartésienne $y+z-3=0$.
Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathscr{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS=MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST].
On admet que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4.a. Justifier que $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D$.
4.b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

CORRECTION

1.a. $A(5;0;-1)$ $B(1;4;-1)$ $R\left(\frac{5+1}{2};\frac{0+4}{2};\frac{-1-1}{2}\right)$ $R(3;2;-1)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$.

1.b. $M(x;y;z)$ $\overrightarrow{RM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z+1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$

M appartient à $\mathscr{P}_1$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{RM}=0$ $\Leftrightarrow$ $-4\times(x-3)+4\times(y-2)+0\times(z+1)=0$ $\Leftrightarrow$
$-4x+12+4y-8=0$ $\Leftrightarrow$ $-4x+4y+4=0$ $\Leftrightarrow$ $-x+y+1=0$

1.c. $E(10;9;8)$ $-10+9+1=0$ donc E appartient au plan $\mathscr{P}_1$.
$EA^2=(5-10)^2+(0-9)^2+(-1-8)^2=25+81+81=187$
$EB^2=(1-10)^2+(4-9)^2+(-1-8)^2=81+25+81=187$
$EA^2=EB^2$ $\Leftrightarrow$ $EA=EB$

2.a. $\overrightarrow{N_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_2$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$.

Les vecteurs $\overrightarrow{N_2}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles, alors ils sécants.

2.b. $M(x;y;z)\in\Delta$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}-x+y+1=0\\x-z-2=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}z=t\\-x+y+1=0\\x-t-2=0\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

3. On résout le système :
$$\begin{cases}y+z-3=0\\x=2+t\\y=1+t\\z=t\end{cases}$$
On obtient : $1+t+t-3=0$ $\Leftrightarrow$ $2t=2$ $\Leftrightarrow$ $t=1$
et $x=2+1=3$ $y=1+1=2$ $z=1$ donc $\Omega\ (3;2;1)$.

4.a. Ω est le point d'intersection de Δ et $\mathscr{P}_3$ or Δ est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ donc Ω appartient au 3 plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$.
On a donc $\Omega A=\Omega B$ et $\Omega A=\Omega C$ et $\Omega A=\Omega D$.
Conclusion
$\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D$

4.b. Les points A, B, C et D appartiennent à la sphère de centre Ω (3;2;1) et de rayon $R=\Omega A$
A(5;0;-1) $R^2=(5-3)^2+(0-2)^2+(-1-1)^2=4+4+4=12$ $\Leftrightarrow$ $R=2\sqrt{3}$