Exercice 1 7 points

Métropole – Antilles - Guyane

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Fonction exponentielle - Suites

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie ;
L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de compriné, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimé en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle [0;10] par : $f(t)=3te^{-0,5t+1}$ où t défini le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1.a. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0;10]$, on a : $f'(t)=3t(-0,5t+1)e^{-0,5t+1}$.
1.b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0:10].
1.c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
Quelle est alors cette quantité maximale ?

2.a. Montrer que l'équation $f(t)=5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;2]$ notée α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
On admet que l'équation $f(t)=5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2;10]$ notée β et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.
2.b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter, initialement au patient, piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de ce médicament puis à réinjecter toutes les heures une dode de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament présente dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimé en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la $n^{\text{ième}}$ heure. On a donc $u_0=2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=0{,}7u_n+1{,}8$.

3.a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
3.b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
On note L sa limite.
3.c. Déterminer la valeur de L. Interpréter cette valeur le contexte de l'exercice.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n=6-u_n$.
4.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}7$ dont on précisera le premier terme.
4.b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
4.c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5{,}5$ mg.
Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

CORRECTION

Partie A

1.a. $t \in [0;10]$ $f(t)=3te^{-0,5t+1}$

$(3t)'=3$ $(e^{-0,5t+1})'=-0,5e^{-0,5t+1}$

$f'(t)=3e^{-0,5t+1}+3t(-0,5e^{-0,5t+1})=3(1-0,5t)e^{-0,5t+1}$.

1.b. Pour tout $t \in [0;10]$ on a $3e^{-0,5t+1}>0$ donc le signe de $f'(t)$ est le signe de $1-0,5t$.

$1-0,5t=0 \Leftrightarrow 1=0,5t \Leftrightarrow \frac{1}{0,5}=t \Leftrightarrow t=2$

$1-0,5t>0 \Leftrightarrow 1>0,5t \Leftrightarrow 2>t$

$1-0,5t<0 \Leftrightarrow 2<t$

$f(0)=0$ $f(2)=6\times e^0=6$ $f(10)=30e^{-4}\simeq 0,55$

Tableau de variation de f

x	0		2		10
f '(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	6	↘	f(10)

1.c. $f(2)=6$ (mg) est la quantité maximale de médicament présente dans le sang du patient.

2.a. f est dérivable et strictement croissante sur [0;2] à valeurs dans [0;6], $5 \in [0;6]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(t)=5$ admet une unique solution α appartenant à [0;2].

En utilisant la calculatrice on obtient $\alpha=1,02$ à 10^{-2} près.

De même l'équation $f(t)=5$ admet une unique solution β appartenant à l'intervalle [2;10].

$\beta=3,46$ à 10^{-2} près.

2.b. En considérant le tableau de variation de f, on obtient les solutions de l'inéquation $f(t)\geqslant 5$.

$f(t)\geqslant 5 \Leftrightarrow [\alpha;\beta]$.

La durée (en heure) d'efficacité du médicament est : $\beta-\alpha=3,46-1,02=2,44$ h

1 h=60 min donc $0,44$ h$=0,44\times 60$ min

$0,44\times 60=26,4$.

La durée d'efficacité du médicament est de 2 h 26 min.

Partie B

1. Au début de la première heure, la quantité de médicament dans le sang du patient est : 2 mg $(u_0=2)$.

Pendant la première heure la quantité de médicament a diminué de 30 % soit $2\times\frac{30}{100}=0,6$ mg.

La quantité de médicament restant dans le sang avant la piqûre de la première heure est : $2-0,6=1,4$ mg.

Après la piqûre de la première heure, la quantité de médicament présente dans le sang du patient est : $1,4+1,8=3,2$ mg donc $u_1=3,2$.

2. Au début de la (n+1)$^{\text{ème}}$ heure la quantité de médicament présente dans le sang du patient est : u_n.

Pendant la (n+1)$^{\text{ème}}$ heure la quantité de médicament diminue de 30 % soit $u_n\times\frac{30}{100}=0,3u_n$.

La quantité de médicament restant dans le sang du patient avant la piqûre de la (n+1)$^{\text{ème}}$ heure est : $u_n-0,3u_n=0,7u_n$.

Après la piqûre de la (n+1)$^{\text{ème}}$ heure, la quantité de médicament dans le sang du patient est : $0,7u_n+1,8$ mg.

Donc $u_{n+1}=0,7u_n+1,8$.

3.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$

. <u>Initialisation</u>
$u_0 = 2 \quad u_1 = 3{,}2$ donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$
La propriété est vérifiée pour n=0.

. <u>Hérédité</u>
Pour démontrer que la propriété est héréditaire, on suppose que $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$ et on doit démontrer que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$.
Si $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$ alors $0{,}7\,u_n \leqslant 0{,}7\,u_{n+1} < 0{,}7 \times 6 = 4{,}2$ et $0{,}7\,u_n + 1{,}8 \leqslant 0{,}7\,u_{n+1} + 1{,}8 \leqslant 4{,}2 + 1{,}8 = 6$
soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$

. <u>Conclusion</u>
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

3.b. Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante et $u_n < 6$ donc la suite (u_n) est majorée par 6.
Toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente.

3.c. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = L$.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 1{,}8$.
On obtient : $L = 0{,}7 \times L + 1{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}3 \times L = 1{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad L = \dfrac{1{,}8}{0{,}3} = 6$.
La quantité maximale possible de médicament dans le sang du patient est 6 mg.

4.a. Pour tout entier naturel n, $v_n = 6 - u_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n = 6 - v_n$
$v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0{,}7\,u_n + 1{,}8) = 4{,}2 - 0{,}7\,u_n = 4{,}2 - 0{,}7 \times (6 - v_n) = 0{,}7\,v_n$
(v_n) est la suite géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$.

4.b. Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0{,}7^n$.
$u_n = 6 - v_n = 6 - 4 \times 0{,}7^n$.

4.c. $u_n \geqslant 5{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 6 - 4 \times 0{,}7^n \geqslant 5{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 6 - 5{,}5 \geqslant 4 \times 0{,}7^n \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}5 \geqslant 4 \times 0{,}7^n$
ln est une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$.
$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}5) \geqslant \ln(4 \times 0{,}7^n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0{,}5) \geqslant \ln(4) + \ln(0{,}7^n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0{,}5) - \ln(4) \geqslant n \times \ln(0{,}7)$
$0 < 0{,}7 < 1$ donc $\ln(0{,}7) < \ln(1) = 0$
$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln(0{,}5) - \ln(2)}{\ln(0{,}7)} \leqslant n$.
En utilisant la calculatrice, $\dfrac{\ln(0{,}5) - \ln(4)}{\ln(07)} \simeq 5{,}83$
n est un entier naturel.
$\Leftrightarrow \quad 6 \leqslant n$
En appliquant le deuxième protocole, il faut 7 injections (la piqûre initiale puis les 6 piqûres toutes les heures jusqu'à la sixième heure) pour obtenir dans le sang du patient une quantité de médicament supérieure ou égale à 5,5 mg.