Exercice 2 — 7 points

Métropole – Antilles - Guyane

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géométrie de l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère :

. le point A de coordonnées $(-1;1;3)$

. la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

On admet que le point A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.

1.a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.
1.b. Montrer que le point $B(-1;3;0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.
1.c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\vec{u}$

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.
2.a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x-y+2z-3=0$
2.b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9};\frac{19}{9};\frac{16}{9}\right)$.
2.c. Calculer la longueur AH. On donnera la valeur exacte.

3. Dans cette question , on se propose de retrouver les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.
On rappelle que le point $B(-1;3;0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.
3.a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB}=k\vec{u}$.
3.b. Montrer que $k=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.
3.c. Calculer la valeur du nombre k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.
Calculer l'aire du triangle ACH.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V=\frac{1}{3}\times\beta\times h$ où β désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

CORRECTION

1.a. Il suffit de lire les coefficients du paramètre t dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$: $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1.b. $B(-1;3;0)$ on résout le système : $\begin{cases}-1=1+2t\\3=2-t\\0=2+2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2=2t\\1=-t\\-2=2t\end{cases} \Leftrightarrow \{t=-1$.

Donc le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$.

$A(-1;1;3)$ $B(-1;3;0)$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

$\vec{AB}.\vec{u}=0\times2+2\times(-1)-3\times2=-2-6=-8$

2.a. $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$A(-1;1;3)$ $M(x;y;z)$ $\vec{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-3\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

M appartient au plan $\mathscr{P}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{AM}.\vec{u}=0$ $\Leftrightarrow$ $(x+1)\times2+(y-1)\times(-1)+(z-3)\times2=0$

$\Leftrightarrow$ $2x+2-y+1+2z-6=0$ $\Leftrightarrow$ $2x-y+2z-3=0$

2.b. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$, on résout le système :

$\begin{cases}2x-y+2z-3=0\\x=1+2t\\y=2-t\\z=2+2t\end{cases}$ on obtient $2\times(1+2t)-(2-t)+2\times(2+2t)-3=0$

$\Leftrightarrow$ $2+4t-2+t+4+4t-3=0$ $\Leftrightarrow$ $9t+1=0$ $\Leftrightarrow$ $t=-\frac{1}{9}$

$x=1+2\times\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{9-2}{9}=\frac{7}{9}$ $y=2-\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{18+1}{9}=\frac{19}{9}$ $z=2+2\times\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{18-2}{9}=\frac{16}{9}$

$H\left(\frac{7}{9};\frac{19}{9};\frac{16}{9}\right)$

2.c. $A(-1;1;3)$ $AH^2=\left(\frac{7}{9}+1\right)^2+\left(\frac{19}{9}-1\right)^2+\left(\frac{16}{9}-3\right)^2=\left(\frac{16}{9}\right)^2+\left(\frac{10}{9}\right)^2+\left(-\frac{11}{9}\right)^2=\frac{16^2+10^2+11^2}{9^2}$

$AH^2=\frac{477}{9^2}=\frac{53\times9}{9^2}=\frac{53}{9}$ donc $AH=\frac{\sqrt{53}}{3}$.

3.a. B et H appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ donc le vecteur $\vec{HB}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ qui est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ donc il existe un nombre réel k tel que $\vec{HB}=k\vec{u}$.

3.b. $\vec{AB}.\vec{u}=(\vec{AH}+\vec{HB}).\vec{u}=\vec{AH}.\vec{u}+\vec{HB}.\vec{u}$

A et H appartiennent au plan $\mathscr{P}$ et $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ donc $\vec{AH}.\vec{u}=0$.

$\vec{AB}.\vec{u}=\vec{HB}.\vec{u}=(k\vec{u}).\vec{u}=k\times(\vec{u}.\vec{u})=k\times\vec{u}^2=k\times\|\vec{u}\|^2$

$\vec{u}\neq\vec{0}$ donc $\|\vec{u}\|^2\neq0$ et $k=\frac{\vec{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

3.c. $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=-8$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{u}\|^2=2^2+(-1)^2+2^2=9$ $\quad k=-\frac{8}{9}$ $\quad \overrightarrow{HB}=-\frac{8}{9}\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}\\\frac{8}{9}\\-\frac{16}{9}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-1-x_H\\3-y_H\\0-z_H\end{pmatrix}$

$-1-x_H=-\frac{16}{9} \quad\Leftrightarrow\quad x_H=\frac{16}{9}-1=\frac{7}{9}$

$3-y_H=\frac{8}{9} \quad\Leftrightarrow\quad y_H=3-\frac{8}{9}=\frac{27-8}{9}=\frac{19}{9}$

$0-z_H=-\frac{16}{9} \quad\Leftrightarrow\quad z_H=\frac{16}{9}$

$H\left(\frac{7}{9};\frac{19}{9};\frac{16}{9}\right)$

4. C appartient au plan $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{HB}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ donc normal au plan $\mathscr{P}$ et BH est la hauteur du tétraèdre ABCH relative à la base ACH.

$\|\vec{u}\|=\sqrt{9}=3 \qquad HB=\frac{8}{9}\|\vec{u}\| \qquad HB=\frac{8}{9}\times 3=\frac{8}{3}$

β est l'aire du triangle ACH (en unité d'aire).
V est le volume du tétraèdre ABCH (en unité de volume).

On a : $V=\frac{1}{3}\times\beta\times BH$.

Si $V=\frac{8}{9}$ alors $\frac{8}{9}=\frac{1}{3}\times\beta\times\frac{8}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{8}{9}=\frac{8}{9}\times\beta \quad\Leftrightarrow\quad \beta=1$