

Exercice 3

7 points

Métropole – Antilles - Guyane

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

**Thème: Probabilités**

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.

Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

1. Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

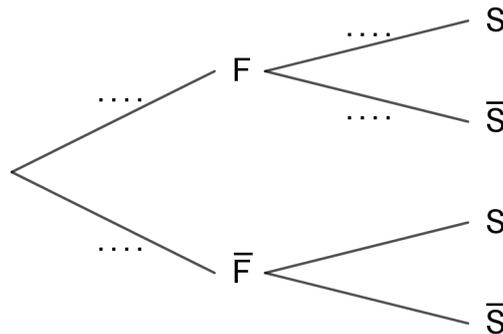
On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les événements :

- . F : « le salarié interrogé est une femme »
- . S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

$\bar{F}$  et  $\bar{S}$  désignent respectivement les événements contraires des événements F et S.

1.a. Donner la probabilité de l'événement S.

1.b. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous sur les quatre branches indiquées.



1.c. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à 0,208.

1.d. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

1.e. Le directeur affirme, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.

Justifier l'affirmation du directeur.

2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

2.a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.

2.b. Déterminer à  $10^{-3}$  près, la probabilité que 5 salariés dans l'échantillon de 20 aient suivi le stage.

2.c. Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale(i,n,p)** créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité  $P(X=i)$  dans le cas où la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

```
def proba(k):
    P=0
    for i in range(0;k+1):
        P=P+binomiale(i,20,0.25)
    return P
```

Déterminer, à  $10^{-3}$  près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit `proba(5)` dans la console Python.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

**2.d.** Déterminer, à  $10^{-3}$  près, la probabilité qu'au moins 6 salariés de l'échantillon de 20 aient suivi le stage.

**3.** Cette question est indépendante des questions 1 et 2.

Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5 % contre 2 % d'augmentation pour les salariés n'ayant pas suivi le stage.

Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions.

**CORRECTION**

1.a. L'énoncé précise : ce stage a été suivi par 25 % des salariés donc :  $P(S)=0,25$ .

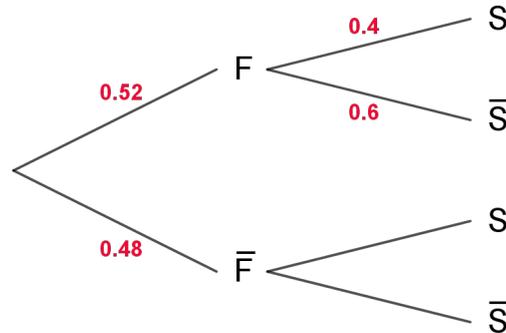
1.b. Dans cet entreprise 52 % des salariés sont des femmes donc :

$$P(F)=0,52 \text{ et } P(\bar{F})=1-P(F)=1-0,52=0,48.$$

Parmi les femmes 40 % ont suivi le stage donc :

$$P_F(S)=0,4 \text{ et } P_S(\bar{F})=1-P_S(F)=1-0,4=0,6.$$

On obtient :



1.c. On nous demande de calculer :  $P(F \cap S)$ .

$$P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0,52 \times 0,4 = 0,208.$$

1.d. On nous demande de calculer :  $P_S(F)$ .

$$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832.$$

1.e. En utilisant la formule des probabilités totales.

$$P(S) = P(F \cap S) + P(\bar{F} \cap S)$$

$$P(\bar{F} \cap S) = 0,25 - 0,208 = 0,042$$

$$P_{\bar{F}}(S) = \frac{P(\bar{F} \cap S)}{P(\bar{F})} = \frac{0,042}{0,48} = 0,0875.$$

Donc 8,75 % des hommes ont suivi le stage, l'affirmation du directeur est justifiée.

2.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

On choisit au hasard un salarié de l'entreprise.

Succès est l'événement : « le salarié a suivi le stage ».

La probabilité de succès est :  $p=0,25$ .

Échec est l'événement : « le salarié n'a pas suivi le stage ».

La probabilité de l'échec est :  $q=1-0,25=0,75$ .

L'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour que l'on puisse choisir 20 salariés successivement au hasard et que l'on assimile ce choix à un tirage de 20 salariés avec remise.

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 20 épreuves donc la loi de probabilité de X est La loi binomiale de paramètres  $n=20$  et  $p=0,25$ .

2.b.  $P(X=5) = \binom{20}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{15} = 0,202$  à  $10^{-3}$  près. ( en utilisant la calculatrice )

2.c. La valeur renvoyée lorsque l'on saisit  $\text{proba}(5)$  est :

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

C'est à dire  $P(X \leq 5) = 0,617$  à  $10^{-3}$  près.

2.d. La probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage est égale à  $P(X \geq 6)$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,617 = 0,383$$
 à  $10^{-3}$  près.

3. Tous les salariés de l'entreprise (ayant un effectif important) n'ont pas un salaire identique, donc on ne peut pas répondre à cette question.