Exercice 4 — 7 points

Métropole – Antilles - Guyane

Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Fonctions numériques

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre questions est exacte. Les six questions sont indépendantes.
Une réponde incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

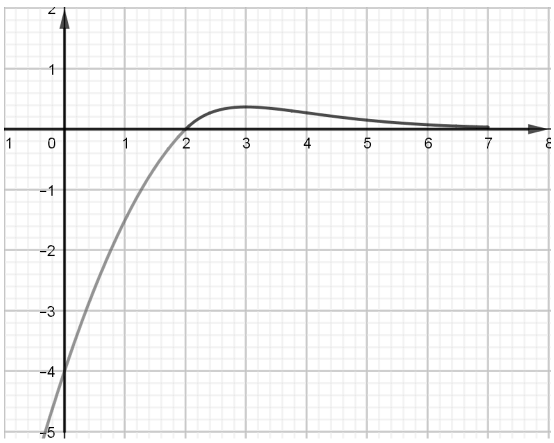
1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

a. $x=-2$ **b.** $y=-1$
c. $y=-2$ **d.** $y=0$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\,e^{x^2}$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0)=1$ est définie par :

a. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}e^{x^2}$ **b.** $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}$
c. $F(x)=(1+2x^2)e^{x^2}$ **d.** $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}+\dfrac{1}{2}$

3. On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_{f'}$ de **la fonction dérivée f'** d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



On peut affirmer que la fonction f est :

a. concave sur $[0;+\infty[$ **b.** convexe sur $[0;+\infty[$
c. convexe sur $[0;2]$ **d.** convexe sur $[2;+\infty[$

4. Parmi les primitives de la fonction f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3e^{-x^2}+2$

a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$ **b.** toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$
c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$ **d.** toutes sont croissantes sur $]-\infty;0]$ et décroissantes sur $[0;+\infty[$

5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2\ln(x)}{3x^2+1}$ est égale à :

a. $\dfrac{2}{3}$

b. $+\infty$

b. $-\infty$

d. 0

6. L'équation $e^{2x}+e^{x}-12=0$ admet dans $\mathbb{R}$

a. trois solutions

b. deux solutions

c. une seule solution

d. aucune solution

CORRECTION

1. Réponse : c

Preuve non demandée

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = -\frac{2}{3}$$

2. Réponse : d

Preuve non demandée

$F_a(0)=\frac{1}{2}$ et $F_b(0)=\frac{1}{2}$

$(e^{x^2})'=2x e^{x^2}$ si $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{1}{2}$ alors $F'(x)=\frac{1}{2}\times(2x)\times e^{x^2}=x e^{x^2}=f(x)$ et $F(0)=1$

3. Réponse : c

Preuve non demandée

f' n'est pas monotone sur les intervalles $[0;+\infty[$ ou $[2;+\infty[$ par contre f' est strictement croissante sur $[0;2]$ et f est convexe sur $[0;2]$.

4. Réponse : a

Preuve non demandée

Pour tout nombre réel x, $e^{-x^2}>0$ et $f(x)>0$ donc toute primitive de f est stricte ment croissante sur $\mathbb{R}$

5. Réponse : d

Preuve non demandée

$x\in]0;+\infty[\qquad f(x)=\frac{2\ln(x)}{3x^2+1}=2\times\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{x}{3x^2+1}$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

6. Réponse : c

Preuve non demandée

$$e^{2x}+e^x-12=0 \Leftrightarrow (e^x)^2+e^x-12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=e^x \\ X^2+X-12=0 \end{cases}$$

$X^2+X-12=0 \qquad \Delta=1^2-4\times1\times(-12)=1+48=49=7^2>0$

$X_1=\frac{-1-7}{2\times1}=-4 \qquad X_2=\frac{-1+7}{2\times1}=3$

$e^x=-4$ cette équation n'admet pas de solution.

$e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln(3)$

L'équation proposée admet une unique solution : ln(3).