Exercice 1 — 7 points

Métropole – Antilles - Guyane

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Probabilités

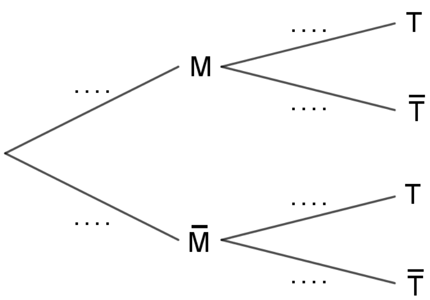
Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie.
Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :
- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et leur fait subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les événements suivants :
- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les événements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

3. Démontrer que la probabilité de T est égale à 0,694.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira au millième.

5.a. Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur arrondissant au millième.

5.b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test et interpréter.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 5 coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

1.a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
Justifier et préciser les paramètres.

1.b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 5 coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.

1.c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ?
Justifier la réponse ?

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif.
Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99.

CORRECTION

Partie A

1. L'énoncé précise :

- 70 % des coyotes sont touchés par la maladie, donc :

  $P(M)=\dfrac{70}{100}=0{,}7$ et $P(\bar{M})=1-0{,}7=0{,}3$.

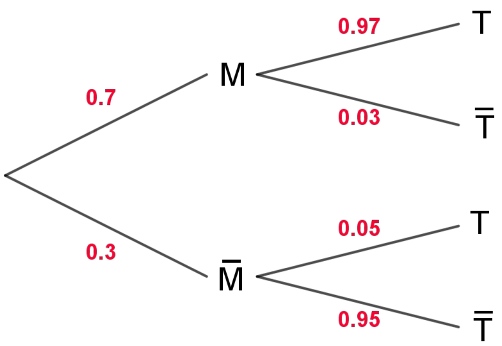
- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas, donc :

  $P_M(T)=\dfrac{97}{100}=0{,}97$ et $P_M(\bar{T})=1-0{,}97=0{,}03$.

- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas, donc :

  $P_{\bar{M}}(\bar{T})=\dfrac{95}{100}=0{,}95$ et $P_{\bar{M}}(T)=1-0{,}95=0{,}05$.

- On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=0{,}7\times 0{,}97=0{,}679$

3. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(T)=P(M\cap T)+P(\bar{M}\cap T)$

$P(\bar{M}\cap T)=P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(T)=0{,}3\times 0{,}05=0{,}015$

$P(T)=0{,}679+0{,}015=0{,}694$

4. La valeur prédictive positive du test est égale à :

$\dfrac{P(M\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0{,}679}{0{,}694}=0{,}978$ au millième près.

5.a. La valeur prédictive négative du test est égale à : $\dfrac{P(\bar{M}\cap \bar{T})}{P(\bar{T})}$.

$P(\bar{M}\cap\bar{T})=0{,}3\times 0{,}95=0{,}285$

$P(\bar{T})=1-P(T)=1-0{,}694=0{,}306$

$\dfrac{P(\bar{M}\cap\bar{T})}{P(\bar{T})}=\dfrac{0{,}285}{0{,}306}=931$ au millième près.

5.b. Si le test est positif il y a 98 % de chance que le coyote sont malade.
Si le test est négatif il y a 93 % de chance que le coyote ne soit pas malade.
Le test est moins fiable lorsqu'il est négatif.

Partie B

1.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
on capture un coyote au hasard et on lui fait subir un test.
Succès est l'événement : « le coyote a un test positif » la probabilité de succès est $p=0{,}694$.
Échec est l'événement : « le coyote a un test négatif » la probabilité de l'échec est $q=1-0{,}694=0{,}306$.

On assimile les tirages successifs des coyotes à des tirages avec remise.
On effectue cinq épreuves successives indépendantes.
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 5 épreuves donc la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}694$.

1.b. $P(X=1)=\binom{5}{1}\times 0{,}694^1\times 0{,}306^4=0{,}03$ au centième près.

1.c. $P(X\geqslant 4)=0{,}52$ au centième près.
$0{,}52>0{,}5$ donc l'affirmation du vétérinaire est vraie.

2. n est un entier naturel non nul.
On capture n coyotes au hasard et on considère Y la variable aléatoire égale au nombre de coyotes ayant un test positif après n captures.
La loi de probabilité de Y est la loi binomiale de paramètres n et $p=0{,}694$.
On veut que $P(Y\geqslant 1)>0{,}99$.
$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)$ $\quad P(Y=0)=q^n=0{,}306^n$
$P(Y\geqslant 1)>0{,}99 \Leftrightarrow 1-0{,}306^n>0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}01>0{,}306^n$
$\ln$ est une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
$\Leftrightarrow \ln(0{,}01)>\ln(0{,}306^n) \Leftrightarrow \ln(0{,}01)>n\times\ln(0{,}306)$
$0<0{,}306<1$ donc $\ln(0{,}306)<0$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}306)}<n$$
$\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}306)}\simeq 3{,}89$ et n est un entier naturel.
$\Leftrightarrow 4\leqslant n$
Il faut capturer au moins 4 coyotes pour avoir une probabilité, d'obtenir au moins un coyote ayant un test positif, supérieure à $0{,}99$.