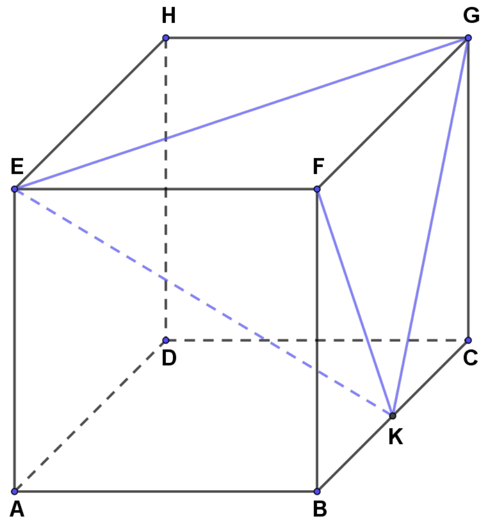
Exercice 3 — 7 points

Métropole – Antilles - Guyane

Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géométrie de l'espace

On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le mimieu du segment [BC].



On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h hauteur relative à cette base.

1. Préciser les coordonnées des points E,F,G et K.

2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).

3. Démontrer que le plan (EGK) admet une équation cartésienne : $2x-2y+z-1=0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.

5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9};\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)$.

6. Justifier que la longueur LF est égale à $\frac{2}{3}$.

7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGH est égal à $\frac{1}{6}$.

8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.

9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment [GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

CORRECTION

1. $E(0;0;1)$ $F(1;0;1)$ $G(1;1;1)$ $B(1;0;0)$ $C(1;1;0)$ $K\left(1;\frac{1}{2};0\right)$

2. $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal au plan (EGK) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGK) par exemple $\vec{n}$ doit être orthogonal aux vecteurs : $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EK}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{EG}=2\times1-2\times1+1\times0=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{EK}=2\times1-2\times\frac{1}{2}+1\times(-1)=2-1-1=0$

$\vec{n}$ est un vecteur orthogonal (ou normal) au plan (EGK).

3. $M(x;y;z)$ $E(0;0;1)$ $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-1\end{pmatrix}$

M appartient au plan (EGK) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{EM}=0$ $\Leftrightarrow$ $2\times x-2\times y+1\times(z-1)=0$ $\Leftrightarrow$ $2x-2y+z-1=0$

4. (d) est la droite passant par F(1;0;1) et de vecteur directeur $\vec{n}$.

$M(x;y;z)$ $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-1\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

(d) : $\begin{cases}x-1=2\times t\\y-0=-2\times t\\z-1=1\times t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x=2t+1\\y=-2t\\z=t+1\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

5. Le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) est le point d'intersection du plan (EGK) et de la droite (d).
On résout le système suivant :

$$\begin{cases}2x-2y+z-1=0\\x=2t+1\\y=-2t\\z=t+1\end{cases}$$

On obtient :

$2\times(2t+1)-2\times(-2t)+1\times(t+1)-1=0$ $\Leftrightarrow$ $4t+2+4t+t+1-1=0$ $\Leftrightarrow$ $9t+2=0$ $\Leftrightarrow$ $t=-\frac{2}{9}$

$x=2\times\left(-\frac{2}{9}\right)+1=\frac{5}{9}$ $y=-2\times\left(-\frac{2}{9}\right)=\frac{4}{9}$ $z=-\frac{2}{9}+1=\frac{7}{9}$ $L\left(\frac{5}{9};\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)$

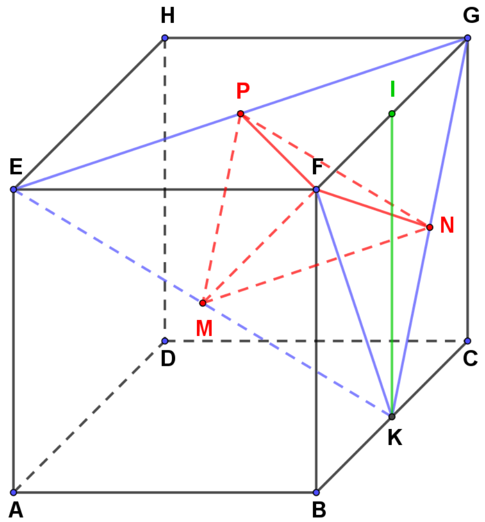
6. $F(1;0;1)$ $L\left(\frac{5}{9};\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)$

$LF^2=\left(1-\frac{5}{9}\right)^2+\left(0-\frac{4}{9}\right)^2+\left(1-\frac{7}{9}\right)^2=\frac{16}{81}+\frac{16}{81}+\frac{4}{81}=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}$

$LF=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

7. Aire du triangle EFG
L'aire du carré EFGH est $1\times1=1$ (unité d'aire).

[EG] est une diagonale du carré donc l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}$ (unité d'aire).



Le projeté orthogonal de K sur le plan (EFG) est le milieu I de [FG], la hauteur h du tétraèdre EFGK issue de K est $KI=BF=1$.

Le volume du tétraèdre EFGK est égal à : $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$ (unité de volume).

8. $\mathscr{B}$ est l'aire du triangle EGK (en unité d'aire)

$V=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times EL \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{6}=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times\frac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \mathscr{B}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ (unité d'aire)

9. P est le milieu de [EG], M est le milieu de [EK] et N est le milieu de [GK] donc
$\frac{PN}{EK}=\frac{PM}{KG}=\frac{MN}{EG}=\frac{1}{2}$

Les triangles EGK et PMN sont semblables et le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$.

L'aire du triangle PMN est égale à l'aire du triangle EGK multipliée par $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

L'aire du triangle PMN est égale à $\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$ (unité d'aire).

LF est aussi la hauteur du tétraèdre FPMN issue de F donc le volume du tétraèdre FPMN est :
$V_1=\frac{1}{3}\times\frac{3}{16}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{24}$ (unité de volume).

<u>*Remarque*</u>
On peut démontrer que l'image du triangle EGK, par l'homothétie de centre J (centre de gravité du triangle EGK) et de rapport $-\frac{1}{2}$*, est le triangle NMP.*