Exercice 4 7 points

Métropole – Antilles - Guyane

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Fonctions numériques - fonction exponentielle

Partie A : études de deux fonctions numériques

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :
$f(x)=0{,}06(-x^2+13{,}7x)$ et $g(x)=(-0{,}15x+2{,}2)e^{0{,}2x}-2{,}2$.
On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

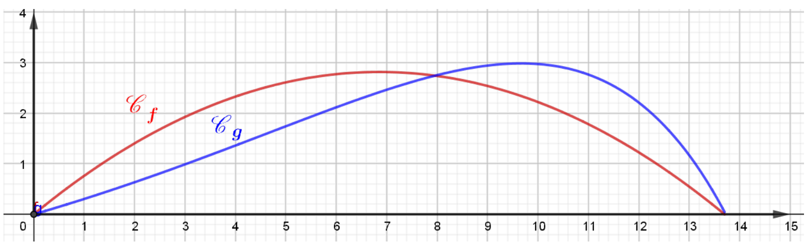
x	0	6.85	+∞
f(x)	0 ↗	f(6.85)	↘ -∞

1.a. Justifier la limite de f en $+\infty$.
1.b. Justifier les variations de f.
1.c. Résoudre $f(x)=0$

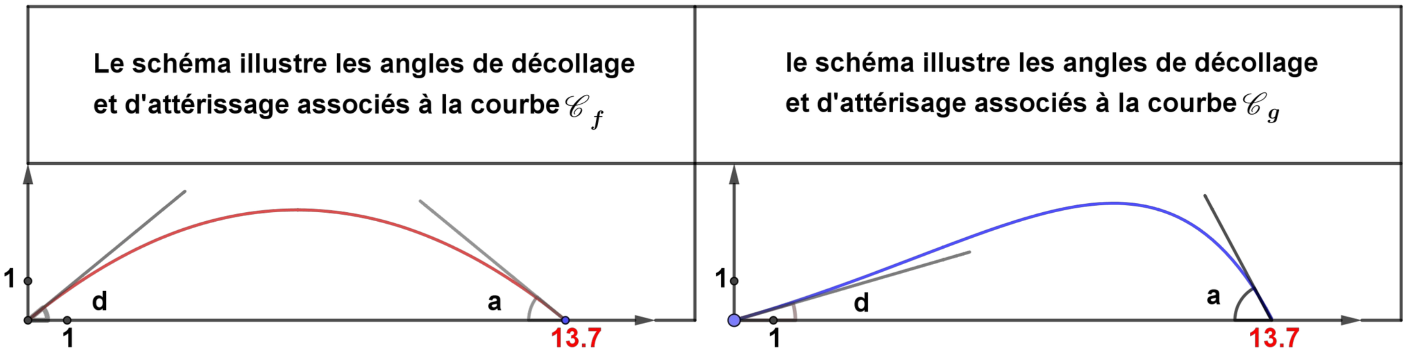
2.a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2.b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0;+\infty[$ on a : $g'(x)=(-0{,}03c+2{,}9)e^{0{,}2x}$.
2.c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0;+\infty[$.
Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.
2.d. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

Partie B : trajectoires d'une balle de golf

Pour frapper une balle, un joueur de golf, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.
On souhaite exploiter les fonctios f et g étudiée en Partie A pour modéliser de deux façon différentes la trajectoire d'une balle de golf. On souhaite que le terrain est parfaitement plat.
On admettra ici que 13,7 est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g.
On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur [0;13,7].



Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaine de yards après la frappe, (avec $0<x<13{,}7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle pat rapport au sol, en dizaine de yards (1 yard correspond environ à 0,914 mètre).
On appelle « angle de décollage » de la balle, l'angle entre l'angle des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$ ou $\mathscr{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un réel d tel que tan(d) est égal au coefficient directeur de cette tangente.
De même, on appelle « angle d'atterrissage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$ ou $\mathscr{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 13,7. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombte a tel que tan(a) est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente.
Tous les angles sont mesurés en degré.



1. *Première modélisation :*
On rappelle qu'ici l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle.
Selon ce modèle :

1.a. Quelle est la hauteur maximale en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

1.b. Vérifier que $f'(0)=0{,}822$.

1.c. Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième.
(on pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

1.d. Quelle propriété graphique de la courbe $\mathscr{C}_f$ permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux ?

2. *Deuxième modélisation :*
On rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yard, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle.

2.a. Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

2.b. On précise que $g'(0)=0{,}29$ et $g'(13{,}7)=-1{,}87$.
Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième.
(on pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

2.c. Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degré de l'angle d'atterrissage de la balle.

<u>**Tableau**</u>
Extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degré d'un angle quand on connaît sa tangente.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	tan(θ)	0.815	0.816	0.817	0.818	0.819	0.820	0.821	0.822	0.823	0.824	0.825	0.826
2	θ en degrés	39.18	39.21	39.25	39.28	39.32	39.35	39.39	39.42	39.45	39.49	39.52	39.56
3													
4	tan(θ)	0.285	0.286	0.287	0.288	0.289	0.290	0.291	0.292	0.293	0.294	0.295	0.296
5	θ en degrés	15.91	15.96	16.01	16.07	16.12	16.17	16.23	16.28	16.33	16.38	16.44	16.49

Partie C : Interrogations des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations de performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats suivants :

Angle de décollage en degré	Hauteur maximale en yard	Angle d'attérissage en degré	Distancce horizontale en yard au point de chute
24	32	52	137

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ?
La réponse sera justifiée.

CORRECTION

Partie A

1.a. $x \in [0;+\infty[\qquad f(x)=0{,}06\times(-x^2+13{,}7x)$

f est une fonction polynôme du second degré.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-0{,}06x^2)=-\infty$

1.b. f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$f'(x)=0{,}06\times(-2x+13{,}7)$

Le signe de $f'(x)$ est égal au signe de (-2x+13,7).

$-2x+13{,}7=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{13{,}7}{2}=6{,}85$

$-2x+13{,}7<0 \quad\Leftrightarrow\quad 13{,}7<2x \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{13{,}7}{2}<x \quad\Leftrightarrow\quad 6{,}85<x$

$-2x+13{,}7>0 \quad\Leftrightarrow\quad 0\leqslant x<6{,}85$

f est strictement croissante sur $[0;6{,}85[$ et strictement décroissante sur $]6{,}85;+\infty[$ et $f(6{,}85)$ est le maximum de f sur $[0;+\infty[$.

1.c. $f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}06\times(-x^2+13{,}7x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad -x^2+13{,}7x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x(-x+13{,}7)=0$

$\Leftrightarrow\quad (x=0 \text{ ou } x=13{,}7)$

2.a. $x\in[0;+\infty[\qquad g(x)=(-0{,}15x+2{,}2)e^{0{,}2x}-2{,}2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-0{,}15+2{,}2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-0{,}15x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}0{,}2x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{0{,}2x}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

2.b. $(e^u)'=u'e^u$ donc $e^{0{,}2x}=0{,}2e^{0{,}2x}$

$(-0{,}15x+2{,}2)'=-0{,}15$

$g'(x)=-0{,}15e^{0{,}2x}+(-0{,}15x+2{,}2)(0{,}2e^{0{,}2x})=-0{,}15e^{0{,}2x}+(-0{,}03x+0{,}44)e^{0{,}2x}$

$g'(x)=(-0{,}03x+0{,}29)e^{0{,}2x}$

2.c. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $e^{0{,}2x}>0$.

Le signe de $g'(x)$ est le signe de (-0,03x+0,29)

$-0{,}03x+0{,}29=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{0{,}29}{0{,}03}=\dfrac{29}{3}$

$-0{,}03x+0{,}29<0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{29}{3}<x$

$-0{,}03x+0{,}29>0 \quad\Leftrightarrow\quad 0\leqslant x<\dfrac{29}{3}$

Tableau de variation de g

x	0		$\frac{29}{3}$		$+\infty$
g '(x)		+	0	−	
g(x)	0	↗	$g(\frac{29}{3})$	↘	$-\infty$

$g(0)=0$

$g\left(\dfrac{29}{3}\right)=\left(-0{,}15\times\dfrac{29}{3}+2{,}2\right)e^{0{,}2\times\frac{29}{3}}-2{,}2=(-1{,}45+2{,}2)e^{\frac{5{,}8}{3}}-2{,}2=0{,}75e^{\frac{5{,}8}{3}}-2{,}2\simeq 2{,}98$

2.d. $g(0)=0$ et g est strictement croissante sur $\left[0;\frac{29}{3}\right]$.

. Si $0<x\leqslant\frac{29}{3}$ alors $g(0)<g(x) \Leftrightarrow 0<g(x)$ donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $\left[0;\frac{29}{3}\right]$.

. g est strictement décroissante sur $\left[\frac{29}{3};+\infty\right[$ à valeurs dans $\left]-\infty;g(\frac{29}{3})\right]$ or $g\left(\frac{29}{3}\right)\simeq 2{,}98$.

$0\in\left]-\infty;g\left(\frac{29}{3}\right)\right]$ e t le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admetune unique solution α appartenant à $\left[\frac{29}{3};+\infty\right[$.

. En utilisant la calculatrice (et on considérant l'énoncé de la partie B)
$g(13)\simeq 1{,}17>0$ et $g(14)\simeq -0{,}55<0$ donc $\alpha\in[13;14]$
Par dichotomie ou par balayage on obtient $\alpha=13{,}72$ à 10^{-2} près.

Partie B

1.a. Le maximum de la fonction f sur [0;13,7] est $f(6{,}85)=0{,}06\times(-6{,}85^2+13{,}7\times 6{,}85)=2{,}81535$.
La hauteur maximale de la balle est ,environ, 2,815 dizaines de yards soit 28,15 yards.

1.b. $f'(x)=0{,}06\times(-2x+13{,}7)$ $f'(0)=0{,}06\times 13{,}7=0{,}822$.

1.c. En utilisant le tableau (ou la calculatrice) on obtient $d\simeq 39{,}4\,°$

1.d. La courbe représentative de la fonction f est une parabole, son axe de symétrie est la droite Δ d'équation $x=6{,}85$. Les tangentes aux points de coordonnées (0;0) et (13,7;0) sont symétriques par rapport à Δ. Les symétries orthogonales par rapport à une droite conservent les angles non orientés donc $d=a\simeq 39{,}4\,°$.

2.a. Le maximum de g est $g\left(\frac{29}{3}\right)\simeq 2{,}98$.

La hauteur maximale de la balle est 29,8 yards.

2.b. $g'(x)=(-0{,}03x+0{,}29)e^{0{,}2x}$ $g'(0)=0{,}29$ $g'(13{,}7)\simeq -1{,}87$.
En utilisant le tableau ou la calculatrice on obtient : $\tan(d)=0{,}29$ $d\simeq 16{,}2$

2.c. En utilisant la calculatrice on obtient : $\tan(a)\simeq 1{,}87$ $a\simeq 62\,°$

Partie C

. Pour les deux modélisations le résultat est confirmé au tableau pour la distance horizontale.
. Pour la première modélisation :
La hauteur maximale de la balle est inférieure à celle du tableau **28,15 yards (-3,85 yards).**
L'angle de décollage est supérieur à celui du tableau **39,4° (+7,4°).**
L'angle d'atterrissage est inférieur à celui du tableau **39,4° (-12,6°).**
. Pour la deuxième modélisation :
La hauteur maximale de la balle est inférieure à celle du tableau **29,8 yards (-2,2 yards).**
L'angle de décollage est inférieur à celui du tableau **16,2° (-7,8°).**
L'angle d'atterrissage est supérieur à celui du tableau **62° (+10°).**
. Le deuxième modèle semble, le plus adapté, pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel.