Exercice 1 7 points

Sujet octobre

dans un repère orthogonal
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Fonctions - Fonction logarithme - Convexité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-6x+4\ln(x)$.
On admet que la fonction f est deux dérivable sur $]0;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1.a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
1.b. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2.a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.
2.b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
En déduire le tableau de variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x)$ admet une unique solution dans l'intervalle [4;5].

4. On admet que, pour tout x de $]0;+\infty[$, on a : $f''(x)=\dfrac{2x^2-4}{x^2}$.
4.a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
4.b. On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2};f(\sqrt{2}))$.
Soit t un réel strictement positif tel que $t\neq\sqrt{2}$. Soit M le point de coordonnées $(t;f(t))$.
En utilisant la question **4.a.** , indiquer selon les valeurs de t, les positions relatives du segment [AM] et la courbe $\mathscr{C}_f$.

CORRECTION

1. $x\in]0;+\infty[\qquad f(x)=x^2-6x+4\ln(x)$.

1.a. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-6x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}4\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

1.b. $x\in]0;+\infty[\qquad f(x)=x\left(x-6+4\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-6)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-6+4\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2.a. $f'(x)=2x-6+4\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-6x+4}{x}$

2.b. $x\in]0;+\infty[$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme : $2x^2-6x+4$ sur $]0;+\infty[$.

$2x^2-6x+4=0\qquad \Delta=(-6)^2-4\times2\times4=36-32=4=2^2\qquad x_1=\dfrac{6-2}{2\times2}=1\qquad x_2=\dfrac{6+2}{2\times2}=2$.

Donc : $f'(1)=f'(2)=0$ et si $x\in]0;1[\cup]2;+\infty[$ alors $f'(x)>0$ et si $x\in]1;2[$ alors $f'(x)<0$.

Tableau de variations de f

x	0		1		2		$+\infty$
f '(x)	‖	+	0	−	0	+	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	-5	↘	4ln(2)-8	↗	$+\infty$

$f(1)=1-6+0=-5$ et $f(2)=4-12+4\ln(2)=4\ln(2)-8$.

3. Sur l'intervalle $]0;2[$, la fonction f admet un maximum $f(1)=-5<0$ donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur]0;2[.

Sur l'intervalle $]2;+\infty[$, f est strictement croissante et dérivable à valeurs dans $]f(2);+\infty[$.

$f(2)<0$ donc $0\in]f(2);+\infty[$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]2;+\infty[$.

En utilisant la calculatrice :

$f(4)=16-24+4\ln(4)\simeq-2{,}45<0\qquad f(5)=25-30+4\ln(5)\simeq1{,}44>0$ donc $\alpha\in[4;5]$.

L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle [4;5].

4. $x\in]0;+\infty[\qquad f''(x)=\dfrac{2x^2-4}{x^2}$

4.a. Le signe de $f''(x)$ est le signe du trinôme : $N(x)=2x^2-4$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

$N(x)=2(x^2-2)=2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

$N(\sqrt{2})=N(-\sqrt{2})=0$

Si $x\in]-\infty;-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};+\infty[$ alors $N(x)>0$.

Si $x\in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$ alors $N(x)<0$.

Si $x\in]0;\sqrt{2}[$ alors $f''(x)<0$.

Si $x\in]\sqrt{2};+\infty[$ alors $f''(x)>0$

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f "(x)	‖	−	0	+	
convexité de f	‖	f est concave		f est convexe	

$f''(\sqrt{2})=0$ donc le point $A(\sqrt{2};f(\sqrt{2}))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
$f(\sqrt{2})=2-6\sqrt{2}+4\ln(\sqrt{2})=2-6\sqrt{2}+2\ln(2)$.

4.b. Si $t\in]0;\sqrt{2}[$ alors $[AM]$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ car f est concave sur $]0;\sqrt{2}]$ donc la corde $[AM]$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$.
Si $t\in]\sqrt{2};+\infty[$ alors $[AM]$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ car f est convexe sur $]\sqrt{2};+\infty[$ donc la corde $[AM]$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$.