Exercice 2 7 points

Sujet octobre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Suites - Fonctions - Fonction exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3 e^x$.
On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0=-1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
1.a. Calculer u_1 puis u_2 .
1.b. On considère la fonction fonc(), écrite en langage Python ci-dessous :

```
def fonc(n):
  u=-1
  for i in range(n):
    u=u**3*exp(u)
  return u
```

On rappelle qu'en langage Python « i in range(n) » signie que i varie de 0 à n-1.
Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par fonc(2) arrondie à 10^{-3}.

2.a. Démontrer que, pour tout x réel, on a : $f'(x)=x^2 e^x(x+3)$.
2.b. Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0 ↘	$-27e^{-3}$	↗ $+\infty$

2.c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $-1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 0$.
2.d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
2.e. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .
On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$.
Déterminer ℓ . (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2 e^x-1=0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$).

CORRECTION

1.a. $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^3 e^x$

$u_0=-1 \quad u_1=f(u_0)=(-1)^3 e^{-1}=-\frac{1}{e} \simeq -0{,}3679$

$u_2=\left(-\frac{1}{e}\right)^3 e^{-\frac{1}{e}}=\frac{-e^{-\frac{1}{e}}}{e^3} \simeq -0{,}0345$.

1.b. fonc(2) renvoie $u_2 \simeq 0{,}034$

2.a. $f(x)=x^3 e^x$

$(x^3)'=3x^2 \qquad (e^x)'=e^x$

$f'(x)=3x^2 e^x+x^3 e^3=x^3 e^x(3+x)$.

2.b. $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x^2=0 \text{ ou } 3+x=0) \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x=-3)$.

Si $x \neq 0$ alors le signe de $f'(x)$ est le signe de 3+x.

x	-∞		-3		0		+∞
f '(x)		–	0	+	0	+	

f est décroissante sur $]-\infty;;-3]$ et croissante sur $[-3;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x=+\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$

$x^3 e^x=-\frac{(-x)^3}{e^{-x}} \quad \lim\limits_{x \to -\infty}(-x)=+\infty \quad \lim\limits_{X \to +\infty}\frac{e^X}{X^3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{X^3}{e^X}=0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 e^x=0$

$f(-3)=(-3)^3 e^{-3}=-27e^{-3}$.

2.c. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

Initialisation

Pour n=0, $u_0=-1$ et $u_1=-\frac{1}{e} \simeq -0{,}368$ donc $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 0$.

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$ et on doit démontrer que $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$.

Si $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$ alors $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(0)$ car la fonction f est croissante sur $[-3;+\infty[$.

$f(-1)-e^{-1} \simeq -0{,}368 \geqslant -1 \qquad f(u_n)=u_{n+1} \qquad f(u_{n+1})=u_{n+2} \qquad f(0)=0$ donc :

$-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

2.d. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant 0$ donc la suite (u_n) est majorée par 0.

Toute suite croissante et majorée est convergente donc : la suite (u_n) est convergente.

2.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=\ell$

ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$.

$f(x)=x \Leftrightarrow x^3 e^x=x \Leftrightarrow x(x^2 e^x-1)=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x^2 e^x-1=0)$

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant 0$ donc $\ell \leqslant 0$ et on admet que l'équation $x^2 e^x-1=0$ possède une seule solution α dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est stictement supérieure à $\frac{1}{2}$ donc $\ell \neq \alpha$.

$\ell = 0$.