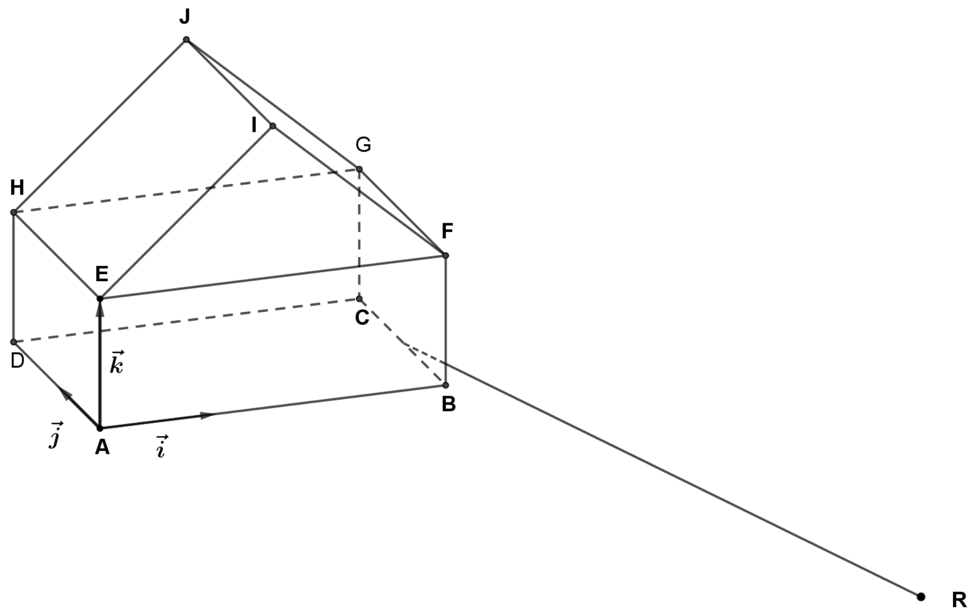
Exercice 3 7 points

Sujet octobre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géométrie de l'espace

Une maison est constituée d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'un prisme EFIHGJ dont une base est un triangle EIF isocèle en I.



On a $AB=3$ $AD=2$ et $AE=1$.

On définit les vecteurs $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\frac{1}{2}AD$ et $\vec{k}=\overrightarrow{AE}$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. Donner les coordonnées du point G.

2. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2;0;-3)$ est un vecteur normal au plan (EHI).
Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).

3. Donner les coordonnées du point I.

4. Déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{EIH}$.

5. Afin de raccorder la maison au réseau électrique, on souhaite creuser une tranchée rectiligne depuis un relais électrique situé en contrebas de la maison.
Le relais est représenté par le point R de coordonnées (6 ;-3 ;-1).
La tranchée est assimilée à un segment de droite Δ Δ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (-3;4;1).
On souhaite vérifier que la tranchée atteindra la maison au niveau de l'arête [BC].

5.a. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ .

5.b. On admet que l'équation du plan (BFG) est $x=3$.
Soit K le point d'intersection de la droite Δ et du plan (BFG).

5.c. Le point K appartient-il bien à l'arête [BC] ?

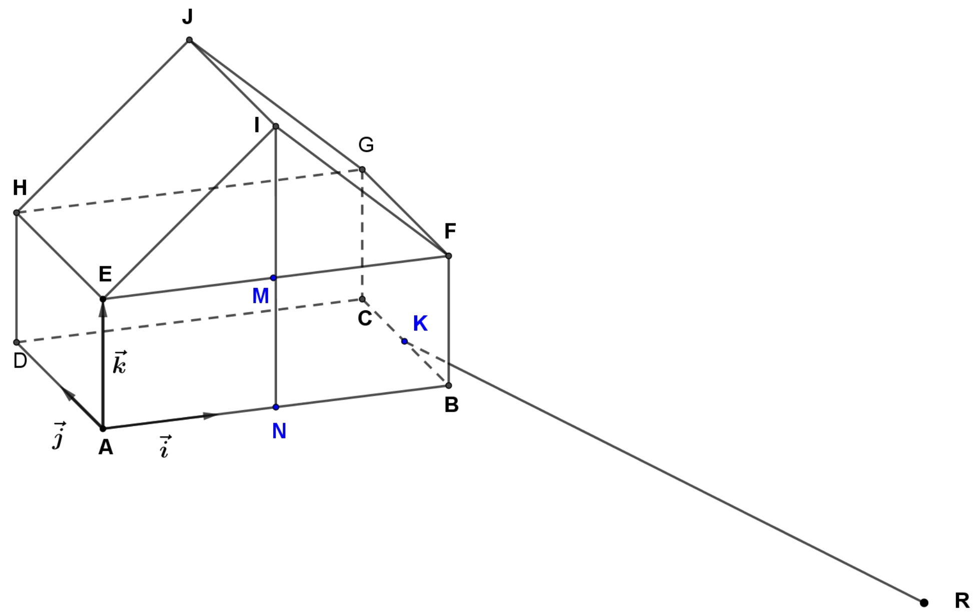
CORRECTION

1. $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}$ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$ $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=3.\vec{i}+2.\vec{j}+1.\vec{k}$
$G(3;2;1)$

2. $E(0;0;1)$ $M(x;y;z)$ $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-1\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (EHI).

M appartient au plan (EHI) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{EM}=0$ $\Leftrightarrow$ $2x+0\times y-3(z-1)=0$ $\Leftrightarrow$ $2x-3z+3=0$

3.



M est le milieu de [EF] et N est le milieu de [AB], le triangle EIF est isocèle en I.
La droite (IM) est perpendiculaire à (EF) et (AB). La droite (IM) est contenue dans le plan (AEB).

$N\left(\frac{3}{2};0;0\right)$ $M\left(\frac{3}{2};0;1\right)$ $I\left(\frac{3}{2};0;z_I\right)$

I appartient au plan (EHI) donc $2\times\frac{3}{2}-3\times z_I+3=0$ $\Leftrightarrow$ $-3z_I+6=0$ $\Leftrightarrow$ $z_I=\frac{6}{3}=2$ $I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$

4. $I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$ $E(0;0;1)$ $F(3;0;1)$ $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IF}=\left(\frac{-3}{2}\right)\times\left(\frac{3}{2}\right)+(-1)\times(-1)=-\frac{9}{4}+1=-\frac{5}{4}$

$IE^2=\left(\frac{-3}{2}\right)^2+(-1)^2=\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$ $IE=\frac{\sqrt{13}}{2}$ $IF=IE=\frac{\sqrt{13}}{2}$ le triangle IFE est isocèle en I.

$\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IF}=IE\times IF\times\cos(\widehat{EIF})$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{5}{4}=\frac{\sqrt{13}}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{2}\times\cos(\widehat{EIF})$ $\Leftrightarrow$ $\frac{13}{4}\times\cos(\widehat{EIF})=-\frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow$ $\cos(\widehat{EIF})=-\frac{5}{13}$. En utilisant la calculatrice $\widehat{EIF}\simeq 112,6°$.

.5.a. Δ est la droite passant par $R(6;-3;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$.

$$\Delta : \begin{cases}x=-3t+6\\y=4t-3\\z=1\times t-1\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

5.b. K est le point d'intersection de la droite Δ et du plan (BFG) : $x=3$.

Pour déterminer les coordonnées du point K, on résout le système :

$$\begin{cases} x = 3 \\ x=-3\mathrm{t}+6 \\ y = 4\mathrm{t}-3 \\ z = \mathrm{t}-1 \end{cases}$$

On obtient : $-3\mathrm{t}+6=3 \quad \Leftrightarrow \quad 3=3\mathrm{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{t}=1$.

Donc $x=3 \qquad y=4-3=1 \qquad z=1-1=0$

$\mathrm{K}(3;1;0)$

5.c. $\mathrm{B}(3;0;0) \qquad \mathrm{C}(3;2;0) \qquad \mathrm{K}(3;1;0)$

On remarque : $\dfrac{3+3}{2}=3 \qquad \dfrac{0+2}{2}=1 \qquad \dfrac{0+0}{2}=0$ donc K est le milieu de [BC] et K appartient à l'arête [BC].