Exercice 4 — 7 points

Sujet octobre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Probabilités

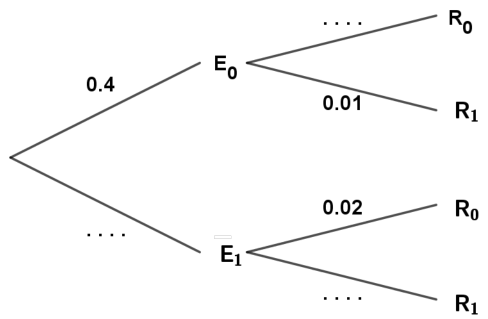
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend six questions.Les six questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est exacte.*** *Le candidat indique sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.

On considère un système de communication binaire transmettant des 0 e t des 1.
Chaque 0 ou 1 est appelé bit.
En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmission :
un 0 peut être reçu comme un 1, de même, un 1 peut être reçu comme un 0.
Pour un bit choisi au hasard dans un message, on note les événements :

. E_0 : « le bit envoyé est un 0 » ;
. E_1 : « le bit envoyé est un 1 » ;
. R_0 **:** « le bit reçu est un 0 » ;
. R_1 **:** « le bit reçu est un 1 ».

On sait que :
$P(E_0)=0{,}4$; $P_{E_0}(R_1)=0{,}01$; $P_{E_1}(R_0)=0{,}02$.

On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $P_B(A)$.
On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessous.



1. La probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0 est égale à :
a. 0,99 **b.** 0,396 **c.** 0,01 **d.** 0,4

2. La probabilité $P(R_0)$ est égale à :
a. 0,99 **b.** 0,02 **c.** 0,408 **d.** 0,931

3. Une valeur, approchée au millième, de la probabilité $P_{R_1}(E_0)$ est égale à :
a. 0,004 **b.** 0,001 **c.** 0,007 **d.** 0,010

4. La probabilité de l'événement : « il y a une erreur de transmission » est égale à :
a. 0,03 **b.** 0,016 **c.** 0,16 **d.** 0,015

Un message de longueur huit bits est appelé octet.
On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0.88

5. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
La probabilité à 10^{-3} près,qu'exactement 7 octets soient transmis sans erreur est égale à :

a. 0,915 **b.** 0,109 **c.** 0,976 octets **d.** 0,085

6. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
La probabilité qu'au moins un octet soit transmis sans erreur est égale à :

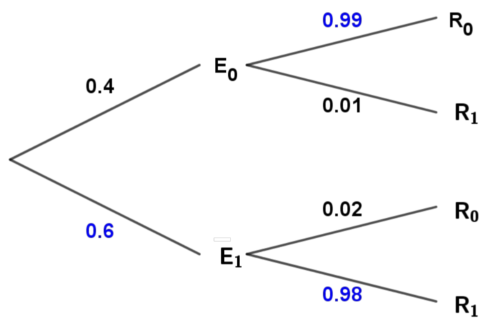
a. $1-0{,}12^{10}$ **b.** $0{,}12^{10}$ **c.** $0{,}88^{10}$ **d.** $1-0{,}88^{10}$

7. Soit N un entier naturel. On transmet successivement N octets de façon indépendante.
Soit N_0 la plus grande valeur de N pour laquelle la probabilité que les N soient transmis sans erreur est supérieure ou égale à 0,1.
On peut affirmer que :

a. $N_0=17$ **b.** $N_0=18$ **c.** $N_0=19$ **d.** $N_0=20$

CORRECTION

On peut compléter l'arbre pondéré donné.
E_0 et E_1 sont deux événements contraires, de même, R_0 et R_1.
$P(E_1)=1-P(E_0)=1-0{,}4=0{,}6$
$P_{E_0}(R_0)=1-P_{E_0}(R_1)=1-0{,}01=0{,}99$
$P_{E_1}(R_1)=1-P_{E_1}(R_0)=1-0{,}02=0{,}98$.
On obtient :



1. Réponse : b
Preuve non demandée
$P(E_0\cap R_0)=P(E_0)\times P_{E_0}(R_0)=0{,}4\times 0{,}99=0{,}396$

2. Réponse : c
Preuve non demandée
On utilise la formule des probabilités totales.
$P(R_0)=P(E_0\cap R_0)+P(E_1\cap R_0)$
$P(E_1\cap R_0)=P(E_1)\times P_{e_1}(R_0)=0{,}6\times 0{,}02=0{,}012$
$P(R_0)=0{,}396+0{,}012=0{,}408$

3. Réponse : c
Preuve non demandée
$P_{R_1}(E_0)=\dfrac{P(E_0\cap R_1)}{P(R_1)}$
$P(R_1)=1-P(R_0)=1-0{,}408=0{,}592$
$P(E_0\cap R_1)=P(E_0)\times P_{E_0}(R_1)=0{,}4\times 0{,}01=0{,}004$
$P_{R_1}(E_0)=\dfrac{0{,}004}{0{,}592}=\dfrac{4}{592}=\dfrac{1}{148}\simeq 0{,}007$ **à 10^{-3} près.**

4. Réponse : b
Preuve non demandée
Il y a erreur de transmission pour les événements $E_0\cap R_1$ et $E_1\cap R_0$ et seulement pour ces événements.
Ces deux événements sont incompatibles, donc :
$P((E_0\cap R_1)\cup(E_1\cap R_0))=P(E_0\cap R_1)+P(E_1\cap R_0)=0{,}004+0{,}012=0{,}016$.

5. Réponse : d
Preuve non demandée
On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On transmet au hasard un octet.
Succès S : « l'octet est transmis sans erreur » la probabilité de succès est égale à $p=0{,}88$.
Échec $\overline{S}$: « l'octet est transmis avec erreur » la probabilité de l'échec est égale à $q=1-0{,}88=0{,}12$.

On effectue 10 épreuves indépendantes et la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 10 épreuves suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}88$.

$P(X=7)=\binom{10}{7}\times p^7\times q^3=\binom{10}{7}\times 0{,}88^7\times 0{,}12^3\simeq 0{,}085$ **à 10^{-3} près.**

6. **Réponse : a**

<u>*Preuve non demandée*</u>

$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$

$P(X=0)=q^{10}=0{,}12^{10}$

$P(X\geqslant 1)=1-0{,}12^{10}$

7. **Réponse : b**

<u>*Preuve non demandée*</u>

La probabilité que les N octets sont transmis sans erreur est égale à $0{,}88^N$.

On veut $0{,}88^N\geqslant 0{,}1$.

ln est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$.

$0{,}88^N\geqslant 0{,}1 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(0{,}88^N)\geqslant\ln(0{,}1) \quad\Leftrightarrow\quad N\times\ln(0{,}88)\geqslant\ln(0{,}1)$

$0<0{,}88<1$ donc $\ln(0{,}88)<0$

$\Leftrightarrow \quad N\leqslant\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}88)}\simeq 18{,}01$

La plus grande valeur de N est donc : $N_0=18$.