Exercice 1 7 points

Sujet octobre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Probabilités

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :
. les tirs à deux points
ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis
. les tirs à trois points
ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :
. Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis.
. Trois quart de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35 % sont réussis.

1. Stéphanie réalise un tir.
On considère les événements suivants :
D : « il s'agit d'un tir à deux points » ;
R : « le tir est réussi ».

1.a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
1.b. Calculer la probabilité $P(\bar{D}\cap R)$.
1.c. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à 0,4125.
1.d. Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.

2. Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.
On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

2.a. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2.b. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexe de l'exercice.
2.c. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus. Arrondir le résultat au centième.
2.d. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit n un entier naturel non nul.
Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points.
On considère que les tirs sont indépendants.
On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.
Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à 0,99.

CORRECTION

1.a. Un quart des tirs de Stéphanie sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis donc :

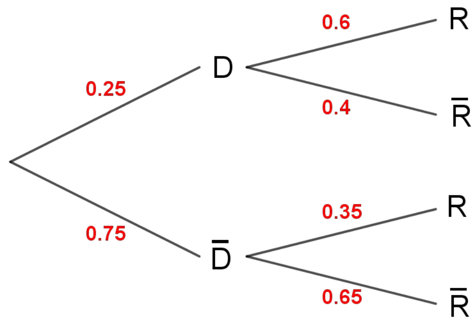
$P(D)=\frac{1}{4}=0,25 \qquad P(\bar{D})=1-0,25=0,75$

$P_D(R)=\frac{60}{100}=0,6 \qquad P_D(\bar{R})=1-P_D(R)=1-0,6=0,4$

. Trois quarts des tirs de Stéphanie sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35 % sont réussis, donc :

$P(\bar{D})=\frac{3}{4}=0,75$ et $P_{\bar{D}}(R)=0,35$ et $P_{\bar{D}}(\bar{R})=1-P_{\bar{D}}(R)=1-0,35=0,65$.

. Arbre pondéré représentant la situation



1.b. $P(\bar{D}\cap R)=P(\bar{D})\times P_{\bar{D}}(R)=0,75\times 0,35=0,2625$

1.c. On utilise la formule des probabilités totales.

$P(R)=P(\bar{D}\cap R)+P(D\cap R)$

$P(D\cap R)=P(D)\times P_D(R)=0,25\times 0,6=0,150$

$P(R)=0,2625+0,15=0,4125$.

1.d. On nous demande de calculer $P_R(\bar{D})$.

$P_R(\bar{D})=\frac{P(\bar{D}\cap R)}{P(R)}=\frac{0,2625}{0,4125}=\frac{7}{11}\simeq 0,64$ arrondi au centième.

2.a. On considère la loi de Bernoulli suivante :

Stéphanie effectue un tir à trois points.

Succès : « le tir est réussi » la probabilité de succès est : $P(S)=p=0,35$.

Échec : « le tir n'est pas réussi » la probabilité de l'échec est : $P(\bar{S})=q=1-0,35=0,65$.

On effectue 10 épreuves indépendantes donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 10 épreuves, est la loi binomiale de paramètres n et $p=0,35$.

2.b. $E(X)=np=10\times 0,35=3,5$

En moyenne, sur 2 fois 10 tirs, Stéphanie réussira 7 tirs.

2.c. On nous demande de calculer : $P(X\leqslant 6)$.

En utilisant la calculatrice, $P(X\leqslant 6)=0,97$.

2.d. On nous demande de calculer : $P(X\geqslant 6)$.

En utilisant la calculatrice, $P(X\geqslant 6)=0,09$

3. Stéphanie effectue n tirs à 3 points. (n est un entier naturel non nul).

Y_n est la variable aléatoire égale au nombre de tirs réussis pour n tirs.

Y_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0,35$.

$P(Y_n\geqslant 1)=1-P(Y_n=0)$ est la probabilité que Stéphanie réalise au moins un tir.

$P(Y_n=0)=0,65^n$ et on veut que : $P(Y_n\geqslant 1)\geqslant 0,99$.

$P(Y_n\geqslant 1)\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1-0,65^n\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 0,01\geqslant 0,65^n$.

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$.

$\Leftrightarrow \ln(0,01)\geqslant \ln(0,65^n) \Leftrightarrow \ln(0,01)\geqslant n\times\ln(0,65)$

$0<0{,}65<1$ donc $\ln(0{,}65)<0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}65)} \leqslant n$

En utilisant la calculatrice : $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}65)} \simeq 10{,}09$, n est un entier naturel.

$\Leftrightarrow \quad 11 \leqslant n$

Stéphanie doit réaliser 11 tirs pour que la probabilité de réussir au moins un tir soit supérieure à 0,99.