Exercice 2 — 7 points

Sujet octobre

Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Fonctions - Fonction logarithme

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x\ln(x)-x-2$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1.a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, on a $f'(x)=\ln(x)$.
1.b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x=e$.
1.c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
1.d. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de tangente T.

2.a. Calculer la limite de la fonction f en 0.
2.b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4.a. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On note α cette solution.
4.b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4{,}3\,;4{,}4[$.
4.c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

5. On considère la fonction seuil suivante écrite en langage Python.
On rappelle que la fonction log du module math (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien ln.

```
def seuil(pas):
  x=4.3
  while x*log(x)-x-2<0:
    x=x+pas
  return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction seuil(0,01) ?
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1.a. $x\in]0;+\infty[$ $\quad$ $f(x)=x\ln(x)-x-2$

$(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$ $\quad$ $(x)'=1$

$f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\left(\dfrac{1}{x}\right)-1=\ln(x)+1-1=\ln(x)$

1.b. $f(e)=e\times\ln(e)-e-2=e-e-2=-2$

$f'(e)=\ln(e)=1$

Une équation cartésienne de la tangente T au point de coordonnées $(e;-2)$ est $y-f(e)=1\times(x-e)$;

$T:\quad y=x-e-2$

1.c. $f''(x)=(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}>0$.

f est convexe sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1.d. f est convexe sur $]0;+\infty[$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de toutes ses tangentes et $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T.

2.a. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$ (résultat de cours) et $\lim\limits_{x\to 0}(-x-2)=-2$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-2$.

2.b. $x\in]0;+\infty[$ $\quad$ $f(x)=x\ln(x)-x-2=x\left(\ln(x)-1-\dfrac{2}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{x}\right)=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ $\quad$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-1-\dfrac{2}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3. $x\in]0;+\infty[$ $\quad$ $f'(x)=\ln(x)$

le signe de $f'(x)$ est le signe de $\ln(x)$.

$\ln(1)=0$

si $0<x<1$ alors $\ln(x)<0$.

si $1<x$ alors $0<\ln(x)$.

Tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
f '(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖ -2	↘	-3	↗	$+\infty$

$f(1)=1\times\ln(1)-1-2=-3$ est le minimum de f sur $]0;+\infty[$.

4.a. Sur l'intervalle]0;1], la fonction f est décroissante, à valeurs dans l'intervalle [-3 ;-2[.

Si $0<x\leqslant 1$ alors $f(x)<-2$ et l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle]0;1].

. Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, f est dérivable et strictement croissante et à valeurs dans $[-3;+\infty[$.

$0\in[-3;+\infty[$ le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$.

. Conclusion

L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4.b. En utilisant la calculatrice, on obtient des valeurs approchées de $f(4,3)$ et $f(4,4)$.

$f(4,3)=-0,028$ à 10^{-3} près $\quad$ $f(4,4)=0,119$ à 10^{-3} près.

$f(4,3)<0$ $\quad$ $f(\alpha)=0$ $\quad$ $f(4,4)>0$

on a : $f(4,3)<f(\alpha)<f(4,4)$ et f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$
donc $4,3<\alpha<4,4$ soit $x\in]4,3;4,4[$.

4.c. Si $0<x<1$ alors $f(x)<-2<0$.
Si $1\leqslant x<\alpha$ alors $f(x)<f(\alpha)=0$.
Si $\alpha<x$ alors $f(\alpha)=0<f(x)$
On donne le signe de f(x) sous la forme d'un tableau.

x	0		α		+∞
f(x)	‖	–	0	+	

5. Si on exécute le programme, la valeur renvoyée pour la fonction seuil(0,01) est 4,32.
Car $f(4,31)\simeq-0,013<0$ et $f(4,32)\simeq0,001>0$.
4,32 est la valeur approchée de α à 10^{-2} près, par excès.