Exercice 3 — 7 points

Sujet octobre

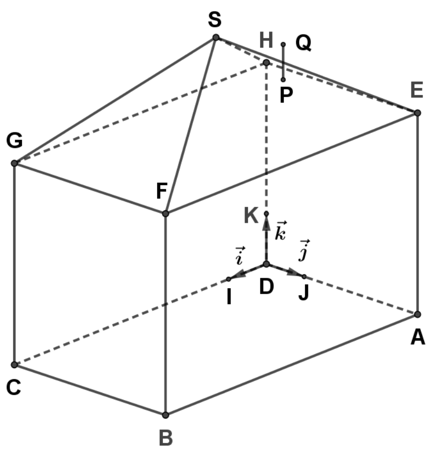
Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géométrie de l'espace

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.
On a $DC=6$; $DA=DH=4$.

Soit les points I ; J et K tels que $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$.

On note : $\vec{i}=\overrightarrow{DI}$; $\vec{j}=\overrightarrow{DJ}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{DK}$.
On se place dans le repère orthonormé $(D;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On admet que le point S a pour coordonnées $(3;2;6)$.



1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.

2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule : $V=\frac{1}{3}\times(\text{aire de la base})\times \text{hauteur}$.

3.a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFS).

3.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est : $y+z-8=0$.

4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment [PQ]. On dispose des données suivantes :
- le point P appartient au plan (EFS).
- le point Q a pour coordonnées $(2;3;5{,}5)$
- la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

4.a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est : $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=5{,}5+t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

4.b. En déduire les coordonnées du point P.

4.c. En déduire la longueur PQ de l'antenne.

5. Un oiseau vole suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=-4+6s \\ y=7-4s \\ z=2+4s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

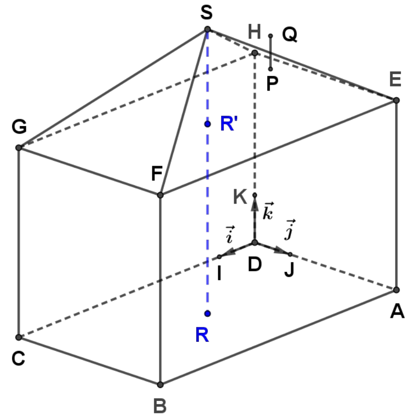
Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ.

L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?

CORRECTION

1. $B(6;4;0)$; $E(0;4;4)$; $F(6;4;4)$; $G(6;0;4)$.

2. EFGH est un rectangle d'aire : $4\times 6=24$ (en unité d'aire).



Si R est le projeté orthogonal de S sur le plan (ACD) et R' le projeté orthogonal de S sur le plan (EGH) alors $R(3;2;0)$ et $R'(3;2;4)$.
$h=SR'=SR-RR'=6-4=2$ (en unité de longueur).

Le volume de la pyramide EFGHS est : $V_1=\frac{1}{3}\times 24\times 2=16$ (en unité de volume).

Le volume du parallélépipède rectangle ABCDEFGH est : $V_2=6\times 4\times 4=96$ (en unité de volume).
Le volume total de la maison est égal à $V=16+96=112=7\times 16$ (en unité de volume).
Le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.

3.a. $E(0;4;4)$ $F(6;4;4)$ $S(3;2;6)$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ES}\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{ES}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (EFS).
$\vec{n}.\overrightarrow{EF}=0\times 6+1\times 0+1\times 0=0$
$\vec{n}.\overrightarrow{ES}=0\times 3+1\times(-2)+1\times 2=0$
$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EFS) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (EFS).

3.b. $M(x;y;z)$ $E(0;4;4)$ $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-0\\y-4\\z-4\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$M\in(EFS) \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{EM}=0 \Leftrightarrow 0\times(x-0)+1\times(y-4)+1\times(z-4)=0 \Leftrightarrow y+z-8=0$

4.a. (PQ) est la droite de vecteur directeur $\vec{k}$ et passant par le point $Q(2;3;;5,5)$.

$M(x;y;z)$ $Q(2;3;5,5)$ $\overrightarrow{MQ}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\\z-5,5\end{pmatrix}$ $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$M\in(PQ) \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}=t.\vec{k}\quad t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=0\\y-3=0\\z-5,5=t\end{cases} t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=3\\z=5,5+t\end{cases} t\in\mathbb{R}$$

4.b. P est le point d'intersection de la droite (PQ) et du plan (EFS).

On résout le système : $\begin{cases}y+z-8=0\\x=2\\y=3\\z=5,5+t\end{cases}$

On obtient : $3+5,5+t-8=0 \Leftrightarrow t=-0,5$

$x=2 \quad y=3 \quad z=5{,}5-0{,}5=5 \qquad P(2;3;5)$.

4.c. $Q(2;3;5{,}5)$

$PQ^2=(2-2)^2+(3-3)^2+(5{,}5-5)^2=0{,}5^2 \qquad PQ=0{,}5$ (en unité de longueur).

5. Δ est la droite de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix}$ passant par le point $T(-4;7;2)$.

$\vec{v}$ et $\vec{k}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (PQ) et Δ ne sont pas parallèles.
On regarde si les deux droites sont sécantes, pour cela on résout le système suivant :

$$\begin{cases}2=-4+6s\\3=7-4s\\5{,}5+t=2+4s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s=1\\s=1\\t=0{,}5\end{cases}.$$

Les deux droites sont sécantes au point $\Omega\,(2;3;6)$.

Le point Ω appartient à la droite (PQ) mais n'appartient pas au segment [PQ] car la côte du point Ω est strictement supérieure à seule du point Q.

L'oiseau ne percutera pas l'antenne.