Exercice 4 — 7 points

Sujet octobre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Suites - Fonctions - Primitives

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend six questions.Les sept questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est exacte.*** *Le candidat indique sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$.

On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge vers $+\infty$

b. la suite (u_n) diverge vers $-\infty$

c. la suite (u_n) n'a pas de limite

d. la suite (u_n) converge

Dans les questions 2 et 3, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation : $w_n=e^{-2v_n}+2$.

2. Soit a un nombre réel strictement positif. On a $v_0=\ln(a)$.
On peut affirmer que :

a. $w_0=\frac{1}{a^2}+2$

b. $w_0=\frac{1}{a^2+2}$

c. $w_0=-2a+2$

d. $w_0=\frac{1}{-2a}+2$

3. On sait que la suite (v_n) est croissante.
On peut affirmer que la suite (w_n) est :

a. décroissante et majorée par 3

b. décroissante et minorée par 2

c. croissante et majorée par 3

d. croissante et minorée par 2

4. On considère la suite (a_n) ainsi définie :

$a_0=2$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{8}{3}$.

On peut affirmer que pour tout entier naturel n, on a :

a. $a_n=4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-2$

b. $a_n=-\frac{2}{3^n}+4$

c. $a_n 4-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

d. $a_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{8n}{3}$

5. On considère la suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a : $b_{n+1}=b_n+\ln\left(\frac{2}{(b_n)^2+3}\right)$.

On peut affirmer que :

a. la suite (b_n) est croissante

b. la suite (b_n) est décroissante

c. la suite (b_n) n'est pas monotone

d. le sens de variation de la suite (b_n) dépend de b_0

6. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.
On peut affirmer que la courbe $\mathscr{C}_g$ admet :

a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale

b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale

c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale

d. aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\,e^{x^2+1}$.
Soit F une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
On peut affirmer que pour tout réel x, on a :

a. $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2 e^{x^2+1}$

b. $F(x)=(1+2x^2)e^{x^2+1}$

c. $F(x)=e^{x^2+1}$

d. $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2+1}$

CORRECTION

1. Réponse : d

Preuve non demandée

Pour tout entier naturel n, $-\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{(-1)^n}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

2. Réponse : a

Preuve non demandée

$v_0=\ln(a)\qquad -2v_0=-2\ln(a)=\ln(a^{-2})=\ln\left(\frac{1}{a^2}\right)\qquad e^{-2v_0}=e^{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{a^2}$

$w_0=e^{-2v_0}+2=\frac{1}{a^2}+2$

3. Réponse : b

Preuve non demandée

Pour tout entier naturel n, $e^{-2v_n}>0$ donc $w_n>2$ et la suite (w_n) est minorée par 2.

La suite (v_n) est croissante donc pour tout entier naturel n, $v_n\leqslant v_{n+1}$ et $-2v_n\geqslant-2v_{n+1}$ on obtient :

$e^{-2v_n}\geqslant e^{-2v\,n+1}$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $e^{-2v_n}+2\geqslant e^{-2v_{n+1}}+2$ soit $w_n\geqslant w_{n+1}$ et la suite (w_n) est décroissante.

4. Réponse : b

Preuve non demandée

On calcule les premiers termes de la suite (a_n).

$a_0=2\qquad a_1=\frac{1}{3}\times a_0+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}\qquad a_2=\frac{1}{3}\times\frac{10}{3}+\frac{8}{3}=\frac{34}{9}$

Pour **a.** $n=1\qquad 4\times\frac{1}{3}-1=\frac{1}{3}\neq\frac{10}{3}$

Pour **b.** $n=1\qquad -\frac{2}{3}+4=\frac{10}{3}\qquad n=2\qquad -\frac{2}{9}+4=\frac{34}{9}$

Pour **c.** $n=1\qquad 4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}\neq\frac{10}{3}$

Pour **d.** $n=1\qquad \frac{2}{3}+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}\qquad n=2\qquad \frac{2}{9}+\frac{16}{3}=\frac{50}{9}\neq\frac{34}{9}$.

Une et une seule des quatre réponse est exacte donc la réponse **b** est exacte.

5. Réponse : b

Preuve non demandée

Pour tout entier naturel n, $(b_n)^2\geqslant0$ donc $(b_n)^2+3\geqslant3$ et $\frac{1}{(b_n)^2+3}\leqslant\frac{1}{3}$.

On obtient : $0<\frac{2}{(b_n)^2+3}\leqslant\frac{2}{3}$ et $\ln\left(\frac{2}{(b_n)^2+3}\right)\leqslant\ln\left(\frac{2}{3}\right)<0$ car ln est croissante sur $]0;+\infty[$ et pour réel x tel que $0<x<1$ alors $\ln(x)<0$.

$b_{n+1}=b_n+\ln\left(\frac{2}{(b_n)^2+3}\right)<b_n$.

La suite (b_n) est décroissante.

6. Réponse : b

Preuve non demandée

$x \in]0;+\infty[$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$ donc $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$ et la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_g$.

$\lim_{X \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\mathscr{C}_g$ n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

7. Réponse : d

Preuve non demandée

On remarque ; $\left(e^{x^2+1}\right)' = 2x e^{x^2+1}$ donc $\left(\frac{1}{2} e^{x^2+1}\right)' = x e^{x^2+1} = f(x)$