Exercice 2 *7 points*

Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Probabilités

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.
Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :
. Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas.
. Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.
Une personne est choisie au hasard dans la population testée.
On considère les événements suivants :
. M : « la personne est malade »
. T : « le test est positif »

1. Calculer la probabilité de l'événement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de 0,0653.

3. Dans le contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?

4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?.
On arrondira à 10^{-2} près.

5. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.
5.a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité de X.
5.b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On arrondira à 10^{-2} près.

6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays, pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

CORRECTION

1. 7 % des habitants du pays sont affectés par la maladie donc :

$P(M)=\frac{7}{100}=0{,}07$ et $P(\bar{M})=1-P(M)=1-0{,}07=0{,}93$

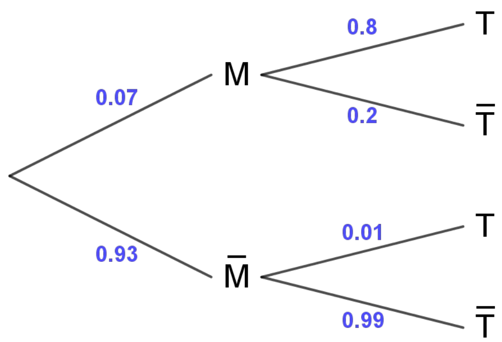
. Pour les personnes malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas donc :

$P_M(\bar{T})=\frac{20}{100}=0{,}2$ et $P_M(T)=1-P_M(\bar{T})=1-0{,}2=0{,}8$

. Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas donc :

$P_{\bar{M}}(T)=\frac{1}{100}=0{,}01$ et $P_{\bar{M}}(\bar{T})=1-P_{\bar{M}}(T)=1-0{,}01=0{,}99$

. On obtient l'arbre pondéré suivant :



. $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=0{,}07\times 0{,}8=0{,}056$

2. En utilisant la formule des probabilités totales.

$P(T)=P(M\cap T)+P(\bar{M}\cap T)$

$P(\bar{M}\cap T)=P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(T)=0{,}93\times 0{,}01=0{,}0093$

$P(T)=0{,}056+0{,}0093=0{,}0653$

3. $P_M(T)$ est la probabilité qu'une personne malade ait un test positif.

$P_T(M)$ est la probabilité qu'une personne, ayant un test positif, soit malade.

Si la personne est malade il n'y a plus rien à dépister par contre si le test est positif, il faut déterminer si la personne est malade.

Donc, il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$.

4. $P_T(M)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}=\frac{0{,}056}{0{,}0653}=\frac{560}{653}\simeq 0{,}86$.

5.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

on teste, au hasard, une personne du pays

succès S : « le test est positif »

la probabilité de succès est $p=P(S)=P(T)=0{,}0653$

échec $\bar{S}$: « le test est négatif »

la probabilité de l'échec est $q=1-0{,}0653=0{,}9347$.

On teste, 10 personnes au hasard, on assimile le choix des 10 personnes à un tirage avec remise.

On effectue donc 10 épreuves de Bernoulli indépendantes.

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 10 épreuves.

La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}0653$.

5.b. $P(X=2)=\binom{10}{2}\times 0{,}0653^2\times 0{,}9347^8\simeq 0{,}11$ à 10^{-2} près.

6. n est un entier naturel non nul.
Si on choisit au hasard n personnes, la probabilité qu'au moins une des personnes ait un test positif est égale à $P(X \geqslant 1)$

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$ $\quad P(X=0) = 0{,}9347^n$ donc $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}9347^n$

$P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 0{,}9347^n \geqslant 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 0{,}99 \geqslant 0{,}9347^n \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}01 \geqslant 0{,}9347^n$

ln est une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}01) \geqslant \ln(0{,}9347^n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0{,}01) \geqslant n \times \ln(0{,}9347)$

$0 < 0{,}9347 < 1$ donc $\ln(0{,}9347) < 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9347)} \leqslant n$

En utilisant la calculatrice $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9347)} \simeq 68{,}19$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel donc

$\Leftrightarrow \quad 69 \leqslant n$

69 est le nombre minimal de personnes à tester, pour que la probabilité qu'au moins l'une des personnes ait un test positif, soit supérieure à 0,99.