Exercice 3 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Suites

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1.a. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
1.b. Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que liste(k) prenne en en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k .

```
1   def liste(k):
2     L=[]
3     u= . . . .
4     for i in range(0,k+1):
5       L.append(u)
6       u= . . . .
7     return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite.

3. En déduire que la suite (u_n) converge .

4. Déterminer la valeur de sa limite.

5.a. Conjecturer une expression une expression de u_n en fonction de n.
5.b. Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

CORRECTION

1.a. $u_0=1$ $\quad u_1=\dfrac{u_0}{1+u_0}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ $\quad u_2=\dfrac{u_1}{1+u_1}=\dfrac{1}{2}:\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}:\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$

$u_3=\dfrac{u_2}{1+u_2}=\dfrac{1}{3}:\left(1+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}:\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$.

1.b. On complète le tableau :

```
def liste(k):
    L=[]
    u= 1
    for i in range(0,k+1):
        L.append(u)
        u= u/(1+u)
    return(L)
```

2. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{1+u_n}-u_n=\frac{u_n-(1+u_n)\times u_n}{1+u_n}=\frac{u_n-u_n-u_n^2}{1+u_n}=\frac{-u_n^2}{1+u_n}$$

Sachant que $u_n>0$ on a $u_{n+1}-u_n<0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

3. Pour tout entier naturel n, $u_n>0$ donc la suite (u_n) est minorée par 0.
(u_n) est une suite décroissante et minorée donc (u_n) est une suite convergente.

4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=L$

donc $L=\dfrac{L}{1+L} \Leftrightarrow L\times(1+L)=L \Leftrightarrow L+L^2=L \Leftrightarrow L^2=0 \Leftrightarrow L=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

5.a. On considérant les calculs de la première question, on peut conjecturer, pour tout entier naturel n :

$u_n=\dfrac{1}{n+1}$.

5.b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$u_n=\dfrac{1}{n+1}$.

<u>Initialisation</u>

Pour $n=0$, $u_0=1$ et $\dfrac{1}{1+0}=1$ donc $u_0=\dfrac{1}{1+0}$ et la propriété est vérifiée pour $n=0$.

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n on suppose que $u_n=\dfrac{1}{n+1}$

et on doit démontrer que $u_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)+1}=\dfrac{1}{n+2}$.

Or $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}=\dfrac{1}{n+1}:\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}:\left(\dfrac{n+1+1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}:\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}\times\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{(n+1)+1}$

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a $u_n=\dfrac{1}{n+1}$.