## Exercice 4 — 7 points

*Le sujet propose 4 exercices.*
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et* ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
*Chaque exercice est noté sur 7 points ( le total sera ramené sur 20).*
*Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.*

**Thème: géométrie dans le plan et dans l'espace**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal où l'on considère :
. Les points $A(2;-1;0)$ $B(1;0;-3)$ $C(6;6;1)$ $E(1;2;4)$
. Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x-y-z+4=0$ .

**1.a.** Démontrer que le ABC est rectangle en A.
**1.b.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.
**1.c.** En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

**2.a.** Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).
**2.b.** En déduire ine équation cartésienne du plan (ABC).
**2.c.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (ABC) passant par E.
**2.d.** Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) à pour coordonnées $\left(4;\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ .

**3.** On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $V=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5 unités de volume.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

**CORRECTION**

**1.a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1\times4+1\times7-3\times1=-4+7-3=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc le triangle ABC est rectangle en A.

**1.b.** $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=1\times5-1\times6+3\times4=5-6+12=11$

$BA^2=(-1)^2+1^2+(-3)^2=1+1+9=11$ $BA=\sqrt{11}$

$BC^2=5^2+6^2+4^2=25+36+16=77$ $BC=\sqrt{77}$

**1.c.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos(\widehat{ABC}) \Leftrightarrow 11=\sqrt{11}\times\sqrt{77}\times\cos(\widehat{ABC}) \Leftrightarrow 11=11\times\sqrt{7}\times\cos(\widehat{ABC})$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{ABC})=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

En utilisant la calculatrice $\widehat{ABC}=68\,°$

**2.a.** $\mathscr{P}$**:** $2x-y-z+4=0$ $\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

Le plan (ABC) est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{N}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires au plan (ABC).

$\vec{N}.\overrightarrow{AB}=2\times(-1)-1\times1-1\times(-3)=-2-1+3=0$

$\vec{N}.\overrightarrow{AC}=2\times4-1\times7-1\times1=8-7-1=0$

$\vec{N}$ est un vecteur normal au plan (ABC) et les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

**2.b.** Une équation cartésienne de (ABC) est : $2x-y-z+d=0$.

$A(2;-1;0)$ $2\times2-1\times(-1)-0+d=0 \Leftrightarrow 4+1+d=0 \Leftrightarrow d=-5$

$(ABC):\ 2x-y-z-5=0$

**2.c.** $\vec{N}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$

$M(x;y;z)$ $E(1;2;4)$ $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-4\end{pmatrix}$ $\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

M appartient à $\mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{EM}=t.\vec{N}$ $t\in\mathbb{R}$

$\mathscr{D}:\begin{cases}x-1=2t\\y-2=-t\\z-4=-t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}:\begin{cases}x=2t+1\\y=-t+2\\z=-t-4\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

**2.d.** H est le point d'intersection de (ABC) et $\mathscr{D}$.

On résout le système :

$$\begin{cases}2x-y-z-5=0\\x=2t+1\\y=-t+2\\z=-t+4\end{cases}$$

On obtient :

$2(2t+1)-(-t+2)-(-t+4)-5=0 \Leftrightarrow 4t+2+t-2+t-4-5=0 \Leftrightarrow 6t-9=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$

$x=2\times\dfrac{3}{2}+1=4$ $y=-\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{1}{2}$ $z=-\dfrac{3}{2}+4=\dfrac{5}{2}$ $H\left(4;\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

**3.** L'aire du triangle rectangle ABC est égale à $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}\times AB\times AC$ .

$AB=\sqrt{11}$ $\quad AC^2=16+49+1=66$ $\quad AC=\sqrt{66}$

$\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{11}\times\sqrt{66}=\dfrac{11\times\sqrt{6}}{2}$ (en unité d'aire).

$h=EH$ $\quad E(1;2;4)$ $\quad H\left(4;\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

$EH^2=(4-1)^2+\left(\dfrac{1}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}-4\right)^2=9+\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}=9+\dfrac{9}{2}=\dfrac{27}{3}$

$EH=\sqrt{\dfrac{27}{2}}=3\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ .

$V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{11\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{6}}{2}=\dfrac{11\times 6}{4}=\dfrac{33}{2}=16{,}5$ (en unité de volume).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés