Exercice 1 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Fonctions - Primitives - Probabilités

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre questions est exacte. Les six questions sont indépendantes.
Une réponde incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonctions f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x\ln(x)-x+1$.
Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la dérivée de f ?

a) ln(x)	b) $\frac{1}{x}-1$	c) ln(x)-2	d) ln(x)-1

2. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2(1-\ln(x))$.
Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

a $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$	b $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$	c $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$	d la fonction n'admet pas de limite en 0

3. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-0,9x^2-0,1x$.
Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}$ est :

a) 0	b) 1	c) 2	d) 3

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=k(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $K(x)=H(2x)$	b) $K(x)=2H(2x)$	c) $K(x)=\frac{1}{2}H(2x)$	d) $K(x)=2H(x)$

5. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=xe^x$ est :

a) y=ex+e	b) y=2ex-e	c) y=2ex+e	d) y=ex

6. Les nombres entiers n solutions de l'équation $0,2^n<0,001$ sont tous les nombres entiers n tels que :

a) $n\leq 4$	b) $n\leq 5$	c) $n\geq 4$	d) $n\geq 5$

CORRECTION

1. Réponse : a

Preuve non demandée

$f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\left(\frac{1}{x}\right)-1=\ln(x)+1-1=\ln(x)$

2. Réponse : c

Preuve non demandée

$g(x)=x^2-x^2\ln(x)=x^2-x\times(x\ln(x))$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$ (résultat de cours) donc $\lim\limits_{x\to 0} x\times(x\ln(x))=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$

donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

3. Réponse : d

Preuve non demandée

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-0,9x^2-0,1x=0 \Leftrightarrow x(x^2-0,9x-0,1)=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x^2-0,9x-0,1=0)$

1 et -0,1 sont les solutions de l'équation $x^2-0,9x-0,1=0$

Donc l'équation $f(x)=0$ admet 3 solutions.

4. Réponse : c

Preuve non demandée

$(H(2x))'=2H'(2x)=2h(2x)=2k(x)$

$\left(\frac{1}{2}H(2x)\right)'=\frac{1}{2}\times(2k(x))=k(x)$

5. Réponse : b

Preuve non demandée

$f(x)=xe^x \qquad f(1)=1\times e^1=e$

$f'(x)=1\times e^x+x\times e^x=(x+1)e^x \qquad f'(1)=2e$

Une équation de la tangente à la représentative de f au point de coordonnées $(1;e)$ est :

$y-e=2e(x-1) \Leftrightarrow y=2ex-2e+e \Leftrightarrow y=2ex-e$

6. Réponse : d

Preuve non demandée

$0,2^n<0,001 \Leftrightarrow \ln(0,2^n)<\ln(0,001)$ (car $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

$\Leftrightarrow n\times\ln(0,2)<\ln(0,001) \Leftrightarrow n>\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)}$ (car $0<0,2<1$ donc $\ln(0,2)<0$)

$\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)}\simeq 4,29$ et n est un entier.

$0,2^n<0,001 \Leftrightarrow n\geqslant 5$