

**Exercice 2****7 points**

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

**Thème: Probabilités**

Les domaines s'intéressent aux importations des casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- . 20 % des casques audios portant le logo de cette marques sont des contrefaçons ;
- . 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- . 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque.

On considère les événements suivants :

- .  $C$  : « le casque est un casque contrefait » ;
- .  $D$  : « le casque présente un défaut de conception » ;
- .  $\bar{C}$  et  $\bar{D}$  désignent respectivement les événements contraires de  $C$  et  $D$ .

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront à  $10^{-3}$  près, si nécessaire.

**Partie 1**

1. Calculer  $P(C \cap D)$ . On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que  $P(D) = 0,036$ .
3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

**Partie 2**

On commande  $n$  casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question  $n=35$ .
  - 1.a. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n,p)$  où  $n=35$  et  $p=0,036$ .
  - 1.b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés exactement un casque présentant un défaut de conception.
  - 1.c. Calculer  $P(X \leq 1)$ .
2. Dans cette question  $n$ , n'est pas fixé.

Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que, la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieure à 0,99 ?

**CORRECTION**

**Partie 1**

1. 20 % des casques audio portant le logo de cette marque ont des contrefaçons, donc :

$$P(C) = \frac{20}{100} = 0,2 \quad \text{et} \quad P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,2 = 0,8$$

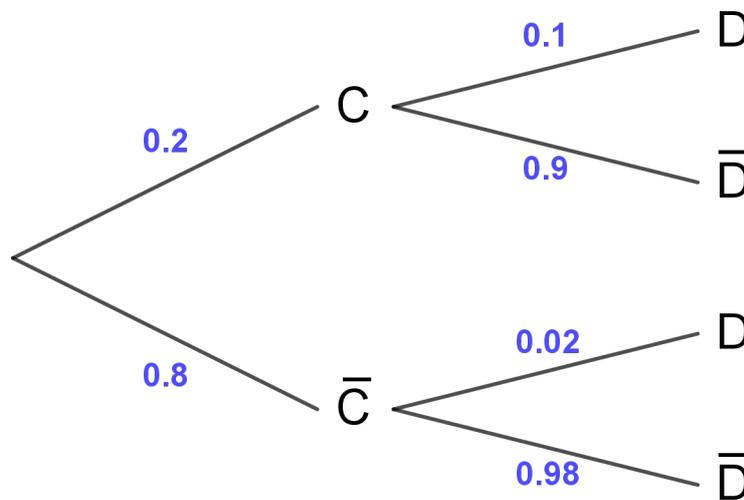
. 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception :

$$P_{\bar{C}}(D) = \frac{2}{100} = 0,02 \quad \text{et} \quad P_{\bar{C}}(\bar{D}) = 1 - P_{\bar{C}}(D) = 1 - 0,02 = 0,98$$

. 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

$$P_C(D) = \frac{10}{100} = 0,1 \quad \text{et} \quad P_C(\bar{D}) = 1 - P_C(D) = 1 - 0,1 = 0,9$$

. Arbre pondéré représentant la situation.



.  $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$

2. Formule des probabilités totales

$$P(D) = P(C \cap D) + P(\bar{C} \cap D)$$

$$P(\bar{C} \cap D) = P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(D) = 0,8 \times 0,02 = 0,016$$

$$P(D) = 0,02 + 0,016 = 0,036$$

3.  $P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,02}{0,036} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0,556$  à  $10^{-3}$  près.

**Partie 2**

1.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque succès  $S$  : « le casque présente un défaut de conception »

la probabilité de succès est :  $p = P(S) = P(D) = 0,036$

échec  $\bar{S}$  : « le casque ne présente pas de défaut de conception »

la probabilité de l'échec est :  $q = P(\bar{S}) = P(\bar{D}) = 1 - 0,036 = 0,964$

On assimile le choix d'un lot de 35 casques à un tirage aléatoire de 35 casques avec remise, c'est à dire que l'on effectue 35 épreuves successives indépendantes.

$X$  est alors la variable aléatoire égale au nombre de succès en 35 épreuves et la loi de probabilité de  $X$  la loi binomiale de paramètres  $n=35$  et  $p=0,036$  soit  $\mathcal{B}(35 ; 0,036)$ .

1.b.  $P(X=1) = \binom{35}{1} = 0,036^1 \times 0,964^{34} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34}$  à  $10^{-3}$  près.

1.c.  $P(X \leq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,964^{35} = 1 - 0,277 = 0,723$  à  $10^{-3}$  près.

2. Pour un tirage de  $n$  casques ( $n \geq 1$ ), la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut de conception est égale à :  $1 - 0,964^n$ .

On veut :

$$1 - 0,964^n > 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,99 > 0,964^n \Leftrightarrow 0,01 > 0,964^n$$

(  $\ln$  est une fonction strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  )

$$\Leftrightarrow \ln(0,01) > \ln(0,964^n) \Leftrightarrow \ln(0,01) > n \times \ln(0,964)$$

(  $0 < 0,964 < 1$  donc  $\ln(0,964) < 0$  )

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} < n$$

$$\left( \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \simeq 125,6 \right) \text{ et } n \text{ est un entier naturel.}$$

$$\Leftrightarrow 126 \leq n.$$

Le nombre minimal de casques à commander, pour avoir une probabilité qu'au moins un casque présente un défaut de conception soit supérieure à 0,99, est 126.