Exercice 3 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Suites - Fonctions

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population pour la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 40 \\ u_{n+1} = 0{,}008\, u_n (200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n le nombre d'invididus au début de l'année (2021+n).

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur [0;100] par : $f(x) = 0{,}008\, x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle [0;100] l'équation $f(x) = x$.

3.a. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0;100] et dresser son tableau de variation.
3.b. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$.
3.c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3.d. Déterminer la limite L de la suite (u_n) .
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p):
  n=0
  u=40
  while u<p:
    n=n+1
    u=0.008*u*(200-u)
  return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur.
Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

CORRECTION

1. $u_1=0{,}008\times 40\times(200-40)=0{,}32\times 160=51{,}2$.

On peut estimer qu'au début de 2022 il y ait 51 oiseaux.

2. $x\in[0;100]$ $\quad f(x)=0{,}008x(200-x)$

$f(x)=x \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}008x(200-x)=x \quad\Leftrightarrow\quad 1{,}6x-0{,}008x^2=x \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}6x-0{,}006x^2=0$

$\Leftrightarrow\quad x(0{,}6-0{,}008x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x=0 \text{ ou } x=\dfrac{0{,}6}{0{,}008}=\dfrac{600}{8}=75\right)$.

L'équation $f(x)=x$ admet pour solutions 0 et 75 dans l'intervalle $[0;100]$.

3.a. $f(x)=1{,}6x-0{,}008x^2$

$f'(x)=1{,}6-0{,}008\times(2x)=1{,}6-0{,}016x=0{,}016\times(100-x)$.

Le signe de $f'(x)$ sur [0;100] est le signe de $100-x$ donc $f'(x)\geqslant 0$ sur [0;100].

$f(0)=0$ et $f(100)=0{,}8\times 100=80$.

Tableau de variation de f.

x	0		100
f '(x)		+	
f(x)	0	↗	80

3.b. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 100$.

<u>Initialisation</u>

$u_0=0$ et $u_1=51{,}2$ donc $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 100$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 100$ et on doit démontrer que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 100$.

Si $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 100$ alors $f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(100)$ car f est croissante sur [0;100].

Or $f(0)=0$, $f(u_n)=u_{n+1}$, $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(100)=80$ on obtient $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 80$

donc on a : $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 100$.

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 100$.

3.c. Pour tout entier naturel n, on a $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 100$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 100.

Toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente.

3.d. f est dérivable sur [0;100]. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=L$

Or $f(u_n)=u_{n+1}$ donc $f(L)=L$ et L est une solution de l'équation $f(x)=x$ appartenant à [0:100].

$u_0=40$ et la suite (u_n) est croissante donc $40\leqslant u_n$ et $L=75$.

La colonie comptera dans l'avenir au maximum 75 oiseaux.

4. La fonction seuil(p) , définie en python, donnera la première année pour laquelle le nombre d'oiseaux de la colonie sera supérieur ou égal à p.

Or le nombre maximal d'oiseaux est 75, la ligne while u<100 : sera toujours vérifiée et le programme seuil(100) ne s'arrête pas et aucune valeur n'est retournée.