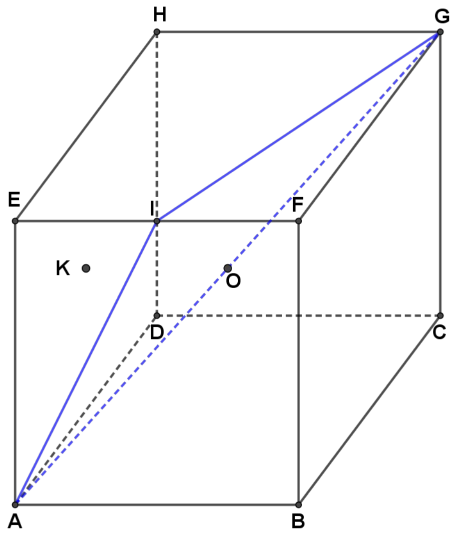
Exercice 4 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géométrie du plan et de l'espace

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
Le point I est le milieu du segment [EF], K est le centre du carré ADHE et est le milieu de [AG].



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes la distance du point B au plan (AIG).

Partie 1 : Première partie

1. Donner sans justification les coordonnées des points A, B et G.
On admet que les points I et K ont pour coordonnées : $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et $K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x-y-z=0$.

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).

5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $L\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

Partie 2 : Deuxième méthode

On rappelle que la volume d'une pyramide est donné par la formule $V=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$ *où* $\mathscr{B}$ *est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.*

1.a. Justifier que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur associée à la base AIB.
1.b. En déduire le volume du tétraèdre ABIG.

2. On admet que $AI = IG = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $AG = \sqrt{3}$.

Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).

CORRECTION

Partie 1

1. $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $G(1;1;1)$

2. $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ $K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$

La droite (BK) est orthogonale au plan (AIG) si et seulement si $\overrightarrow{BK}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AIG) par exemples : $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$.

$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AI}=-1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{2}\times1=0$

$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AG}=-1\times1+\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times1=0$.

Donc (BK) est orthogonale au plan (AIG).

3. $\overrightarrow{BK}$ est un vecteur normal au plan (AIG).

$M(x;y;z)$ appartient à (AIG) si et seulement si : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BK}=0 \Leftrightarrow x\times(-1)+y\times\frac{1}{2}+z\times\frac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow -x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0 \Leftrightarrow 2x-y-z=0$

4. $M(x;y;z)$ appartient à (BK) si et seulement s'il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BK}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=-t\\ y=\frac{1}{2}t\\ z=\frac{1}{2}t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}x=-t+1\\ y=\frac{1}{2}t\\ z=\frac{1}{2}t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

5. Le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) est le point d'intersection de la droite (BK) et du plan (AIG).

On résout le système $\begin{cases}2x-y-z=0\\ x=-t+1\\ y=\frac{1}{2}t\\ z=\frac{1}{2}t\end{cases}$

On obtient :

$2\times(-t+1)-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t=0 \Leftrightarrow -2t+2-t=0 \Leftrightarrow -3t+2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$.

$x=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$ $y=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ $z=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ et $L\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

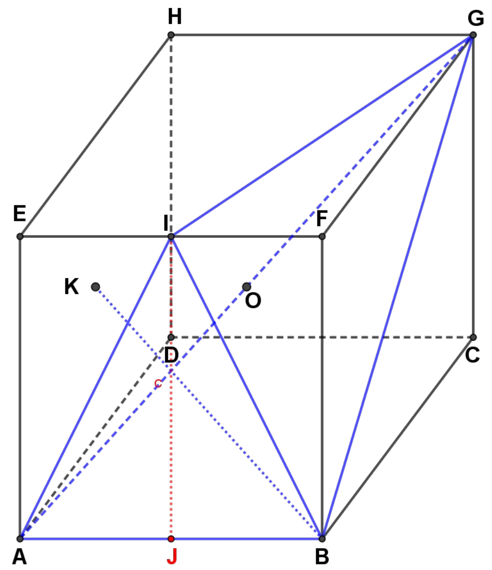
6. La distance du point B au plan (AIG) est BL.

$B(1;0;0)$ $L\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ $BL^2=\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}$

$BL=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ unité de longueur.

Partie 2 :

1.a. [GF] est une arête du cube donc [GF] est orthogonal à la face AFBA, la base ABI du tétraèdre ABIG est contenue dans cette face donc [GF] est la hauteur, du tétraèdre ABIG, associée à la base ABI.



1.b. ABI est un triangle isocèle en I dont la base est {AB] de longueur 1 et de hauteur [IJ] de longueur 1, J est le milieu de [AB]

$\mathscr{B}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$ unité d'aire.

La hauteur associée à la base ABI, dans le tétraèdre ABIG, est [GF] de longueur 1.

Le volume du tétraèdre ABIG est : $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{6}$ unité de volume.

2. O est le milieu de [AG].

Le triangle AIG est isocèle en I donc [IO] est la hauteur du triangle AIG issue de I.

$I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$OI^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad OI=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$AG=\sqrt{3}$ l'aire du triangle AIG est $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. La hauteur du tétraèdre ABIG associée à la base AIG est h=BL distance du point B au plan AIG.

$V=\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}\times h \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{6}=\frac{\sqrt{6}}{12}\times h \quad\Leftrightarrow\quad \frac{12}{6\sqrt{6}}=h \quad\Leftrightarrow\quad h=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ unité de longueur.