Exercice 1 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Probabilités

PARTIE A :

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97.
La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est 0,01465.
On note A l'événement « l'alarme s'active » et D l'événement « un danger se présente ».
On note $\overline{M}$ l'événement contraire de l'événement M et $P(M)$ la probabilité de l'événement M.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

2.a. Cal culer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.
2.b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active.
Arrondir le résultat à 10^{-3}.

3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne se présente est 0,005.

4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsque aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.
Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à 0,01.

PARTIE B :

Une usine fabrique un grande quantité de systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
On note S l'événement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S)=0,00525$.
On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.
Les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

1. Donner la loi de probabilité suivie par la variable X et préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

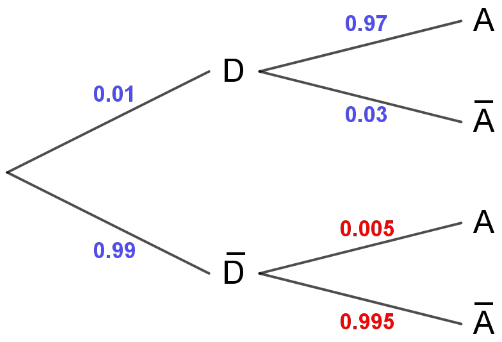
PARTIE C :

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme.
Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé,au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieur à 0,07.

CORRECTION

Partie A :

1. La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01.
Donc $P(D)=0{,}01$ et $P(\bar{D})=1-P(D)=1-0{,}01=0{,}99$
Si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,93.
Donc $P_D(A)=0{,}97$ et $P_D(\bar{A})=1-P_D(A)=1-0{,}97=0{,}03$.
Arbre pondéré :



Les résultats en rouge seront démontrés dans la question 3.

2.a. $P(D\cap A)=P(D)\times P_D(A)=0{,}01\times 0{,}97=0{,}0097$

2.b. On nous demande de calculer $P_A(D)=\dfrac{P(D\cap A)}{P(A)}$.

La probabilité que l'alarme s'active est : 0,01465.
Donc $P(A)=0{,}01465$
$P_A(D)=\dfrac{0{,}0097}{0{,}01465}=\dfrac{970}{1465}=\dfrac{194}{293}=0{,}662$ arrondi à 10^{-3}.

3. On nous demande de calculer $P_{\bar{D}}(A)=\dfrac{P(\bar{D}\cap A)}{P(\bar{D})}$.

En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(A)=P(D\cap A)+P(\bar{D}\cap A) \Leftrightarrow 0{,}01465=0{,}0097+P(\bar{D}\cap A)$
$\Leftrightarrow P(\bar{D}\cap A)=0{,}01465-0{,}0097=0{,}00495$
$P_{\bar{D}}(A)=\dfrac{0{,}00495}{0{,}99}=0{,}005$
On complète l'arbre pondéré avec :
$P_{\bar{D}}(\bar{A})=1-P_{\bar{D}}(A)=1-0{,}005=0{,}995$

4. Le système ne fonctionne pas normalement pour les événements $(D\cap\bar{A})$ ou $(\bar{D}\cap A)$.
Ces deux événements sont incompatibles donc :
$P(S)=P((D\cap\bar{A})\cup(\bar{D}\cap A))=P(D\cap\bar{A})+P(\bar{D}\cap A)$
$P(\bar{D}\cap A)=0{,}00495$
$P(D\cap\bar{A})=P(D)\times P_D(\bar{A})=0{,}01\times 0{,}03=0{,}0003$
$P(S)=0{,}0003+0{,}00495=0{,}00525<0{,}01$

Partie B :

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On prélève au hasard 1 système d'alarme dans la production de l'usine
succès S est l'événement « l'alarme ne fonctionne pas normalement »
la probabilité de succès est : $P(S)=0{,}00525$

échec $\overline{S}$ est l'événement « l'alarme fonctionne normalement »
la probabilité de l'échec est : $P(\overline{S})=1-0,00525=0,99475$.
On prélève successivement 5 systèmes d'alarme, on assimile ce prélèvement à 5 tirages successifs avec remise c'est à dire on suppose les 5 tirages indépendants.
X est alors la variable aléatoire égale au nombre de succès en 5 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,00525$.

2. $P(X=1)=\binom{5}{1}\times 0,00525^1\times 0,99475^4=0,0257$ arrondi à 10^{-4}.

3. $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0,99475^5=0,0260$ arrondi à 10^{-4}.

PARTIE C :

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de succès en n épreuves.
La loi de probabilité de Y est la loi binomiale de paramètres n et $p=0,00525$.
$P(Y\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0,99475^n$.
On veut que :
$P(Y\geqslant 1)>0,07 \quad \Leftrightarrow \quad 1-0,99475^n>0,07 \quad \Leftrightarrow \quad 1-0,07>0,99745^n \quad \Leftrightarrow \quad 0,93>0,99475^n$
(la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)
$\Leftrightarrow \quad \ln(0,93)>\ln(0,99475^n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0,93)>n\times\ln(0,99475)$
($0<0,99745<1$ donc $\ln(0,99475)<0$).
$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln(0,93)}{\ln(0,99475)}<n$
($\dfrac{\ln(0,93)}{\ln(0,99475)}\simeq 13,79$ et n est un entier naturel)
$\Leftrightarrow \quad 14\leqslant n$
14 est le plus petit entier naturel tel que la probabilité, d'avoir dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.