Exercice 2 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Suites

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n^2$.

1.a. Calculer u_1 et u_2.

1.b. Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée suite_u et prend comme paramètre l'entier naturel p.
Elle renvoie le terme de rang p de la suite (u_n).

```
def suite_u(p):
  u= . . .
  for i range(1,. . .):
    u= . . .
  return u
```

2.a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0<u_n\leqslant 4$.

2.b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

2.c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3.a. Justifier que la limite L de la suite (u_n) vérifie l'égalité $L=\frac{1}{5}L^2$.

3.b. En déduire la valeur de L.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=\ln(u_n)$ et $w_n=v_n-\ln(5)$.

4.a. Montrer qiue pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=2v_n-\ln(5)$.

4.b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.

4.c. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que :

$$v_n=\ln\left(\frac{4}{5}\right)\times 2^n+\ln(5).$$

5. Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et retrouver $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

CORRECTION

1.a. Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n^2$.

$u_0=4$ $u_1=\frac{1}{5}u_0^2=\frac{1}{5}\times 4^2=\frac{16}{5}$ $u_2=\frac{1}{5}\times u_1^2=\frac{1}{5}\times\left(\frac{16}{5}\right)^2=\frac{1}{5}\times\frac{256}{25}=\frac{256}{125}$

1.b.

```
def suite_u(p):
  u= 4
  for i range(1,p ):
    u= (1/5)u²
  return u
```

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0<u_n\leqslant 4$.

Initialisation

$u_0=4$ donc $0<u_0\leqslant 4$.

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $0<u_n\leqslant 4$ et on doit démontrer que : $0<u_{n+1}\leqslant 4$.

Si $0<u_n\leqslant 4$ alors $0^2<u_{n+1}^2\leqslant 4^2$ (car la fonction carré est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

et $\frac{1}{5}\times 0<\frac{1}{5}\times u_n^2\leqslant\frac{1}{5}\times 16 \Leftrightarrow 0<u_{n+1}\leqslant\frac{16}{5}$ (car $\frac{1}{5}>0$) donc $0<u_{n+1}\leqslant 4$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $0<u_n\leqslant 4$.

2.b. Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{5}u_n(u_n-5)$.

Or $\frac{1}{5}u_n>0$ et $u_n-5<0$ car $u_n\leqslant 4$ donc $u_{n+1}-u_n<0$.

La suite (u_n) est décroissante.

2.c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente.

3.a. Si $\lim_{n\to+\infty}u_n=L$ alors $\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=L$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5}u_n^2=\frac{1}{5}\times L^2$ donc $L=\frac{1}{5}\times L^2$.

3.b. $L=\frac{1}{5}\times L^2 \Leftrightarrow 5L=L^2 \Leftrightarrow L(L-5)=0 \Leftrightarrow (L=0 \text{ ou } L=5)$.

Or pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant 4$ donc $\lim_{n\to+\infty}u_n\leqslant 4$ et L=0 .

4.a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1})=\ln\left(\frac{1}{5}\times u_n^2\right)=\ln\left(\frac{1}{5}\right)+\ln(u_n^2)=-\ln(5)+2\ln(u_n) \;=-\ln(5)+2v_n=2v_n-\ln(5)$$

4.b. Pour tout entier naturel n :

$w_{n+1}=v_{n+1}-\ln(5)=2v_n-\ln(5)-\ln(5)=2(v_n-\ln(5))=2w_n$.

La suite (w_n) est la suite géométrique de raison 2.

Et de premier terme $w_0=v_0-\ln(5)=\ln(4)-\ln(5)=\ln\left(\frac{4}{5}\right)$.

4.c. Pour tout entier naturel n :

$$w_n = w_0 \times q^n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n$$

$$v_n = w_n + \ln(5) = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$$

5. $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

$0 < \frac{4}{5} < 1$ donc $\ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

$v_n = \ln(u_n) \quad \Leftrightarrow \quad u_n = e^{v_n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{N \to -\infty} e^N = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.