Exercice 3 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes; Fonction - Fonction logarithme

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=1+x^2[1-2\ln(x)]$.
La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Partie A :

1. Justifier que $g(e)$ est strictement négatif.

2. Justifier que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

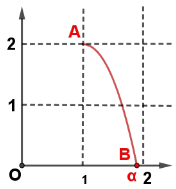
3.a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $g'(x)=-4x\ln(x)$.
3.b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3.c. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
3.d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. Déduire de cequi précède le signe de la fonction g sur $[1;+\infty[$.

Partie B :

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;\alpha]$, $g''(x)=-4[\ln(x)+1]$.
Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1;\alpha]$.

2. Sur la figure ci-dessous, A et B sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.



2.a. Déterminer l'équation de la droite (AB).
2.b. En déduire que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1;\alpha]$:

$$g(x)\geqslant\frac{-2}{\alpha-1}x+\frac{2\alpha}{\alpha-1}.$$

CORRECTION

Partie A :

1. $g(e)=1+e^2[1-2\ln(e)]=1+e^2(1-2)=1-e^2\simeq-6,39<0$

2. $x\in]0;+\infty[$ $\quad g(x)=1+x^2[1-2\ln(x)]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}-2\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2\ln(x))=-\infty$

d'autre part $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(1-2\ln(x))=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

3.a. $(x^2)'=2x \quad (1-2\ln(x))'=-2\times\dfrac{1}{x}$

$$g'(x)=2x[1-2\ln(x)]+x^2\left(-2\times\frac{1}{x}\right)=2x-4x\ln(x)-2x=-4x\ln(x)$$

3.b. Pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $x>0$ donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $-4\ln(x)$.

x	0		1		$+\infty$
ln(x)	‖	–	0	+	
-4ln(x)	‖	+	0	–	

g est strictement croissante sur l'intervalle $]0;1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
$g(1)=1+1(+1)=2$ est le maximum de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3.c. g est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ à valeurs dans l'intervalle $]-\infty;2]$
$0\in]-\infty;2]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation : $g(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à $[1;+\infty[$.

3.d $g(1)>0$ et $g(e)<0$ donc $1<\alpha<e$
$g(2)=1+4\times(1-2\ln(2))\simeq-0,55<0$ donc $1<\alpha<2$.
Par balayage ou dichotomie, on obtient : $1,89<\alpha<1,90$

4. Si $1\leqslant x<\alpha$ alors $g(1)\geqslant g(x)>g(\alpha)=0$
Si $\alpha<x$ alors $g(\alpha)>g(x)$
On donne le signe sous la forme d'un tableau.

x	1		α		$+\infty$
g(x)	2	+	0	–	

Partie B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;\alpha]$, $g''(x)=-4[\ln(x)+1]$.
Si $1\leqslant x\leqslant\alpha$ alors $\ln(1)=0\leqslant\ln(x)$ et $1\leqslant 1+\ln(x)$ donc $g''(x)<0$.
La fonction g est concave sur $[1;\alpha]$.

2.a. $g(1)=2 \quad A(1;2) \quad g(\alpha)=0 \quad B(\alpha;0)$

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à : $\dfrac{g(\alpha)-g(1)}{\alpha-1}=\dfrac{-2}{\alpha-1}$

(AB) : $y=\dfrac{-2}{\alpha-1}x+b \quad g(\alpha)=0$ donc $0=\dfrac{-2\alpha}{\alpha-1}+b \Leftrightarrow b=\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.

L'équation réduite de la droite (AB) est : $y=\dfrac{-2}{\alpha-1}x+\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.

2.b. g est concave sur $[1;\alpha]$, A et B appartiennent à $\mathscr{C}$ donc le segment [AB] est en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ c'est à dire pour tout x de l'intervalle $[1;\alpha]$ le point $M(x;g(x))$ est au-dessus du point $P\left(x;\dfrac{-2}{\alpha-1}x+\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}\right)$ donc $g(x)\geqslant\dfrac{-2}{\alpha-1}x+\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.