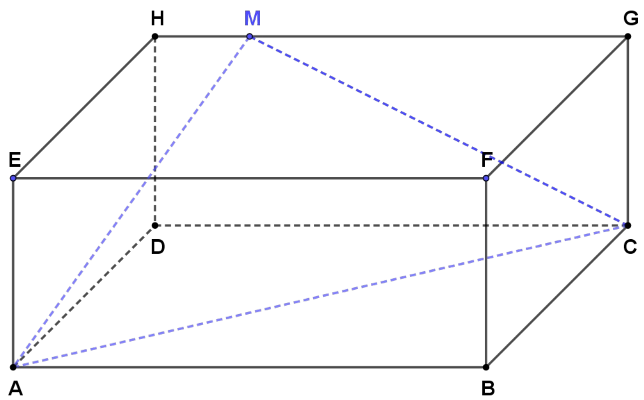
Exercice 4 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géométrie de l'espace

Dans la figure ci-dessous ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB=5, AD=3 et AE=2. L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées : (5;0;0), (0;3;0) et (0;0;2).



1.a. Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.
1.b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM}=k.\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle [0;1].
2.a. Justifier que les coordonnées de M sont (5k;3;2).
2.b. En déduire que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}=25k^2-25k+4$.
2.c. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées (1;3;2).
On admet que le triangle AMC est rectangle en M.
On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule : $\frac{1}{3}\times \text{aire de la base} \times h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées (1;3;0).
3.a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).
3.b. Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).
3.c. En déduire le volume du tétraèdre MACD.

4. On note P le projeté orthogonal du point M sur le plan (AMC).
Calculer la distance DP ; on donnera une valeur arrondie à 10^{-1}.

CORRECTION

1.a. $H(0;3;2)$ $G(5;3;2)$.

1.b. $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$ $M(x;y;z)\in(HG)$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{HM}=t.\overrightarrow{HG}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-0\\y-3\\z-2\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5t\\y=0t+3\\z=0t+2\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

2. $\overrightarrow{HM}=k.\overrightarrow{HF}$ $k\in[1;0]$

2.a. $M(x;y;z)$ $x=5k;\ y=3;\ z=2$ donc $M(5k;3;2)$.

2.b. $A(0;0;0)$ $C(5;3;0)$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}5k\\3\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}5k-5\\3-3\\2-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}5k-5\\0\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}=5k\times(5k-5)+3\times0+2\times2=25k^2-25k+4$

2.c. Le triangle AMC est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}=0 \Leftrightarrow 25k^2-25k+4=0$

$\Delta=25^2-4\times4\times25=625-400=225=15^2$

$k_1=\frac{25+15}{2\times25}=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$ $k_2=\frac{25-15}{2\times25}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$

Le triangle AMC est rectangle en M si et seulement si $k=\frac{4}{5}$ ou $k=\frac{1}{5}$.

3. $M(1;3;2)$ (le triangle AMC est rectangle en M) $K(1;3;0)$ $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$.

3.a. Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur normal au plan (ACD) $D(0;1;0)$ $E(0,1;2)$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

$(x;y;z)\in(ACD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE}=0 \Leftrightarrow x\times0+y\times0+z\times2=0 \Leftrightarrow 2z=0 \Leftrightarrow z=0$.

3.b. $\overrightarrow{MK}=-\overrightarrow{DE}$ donc $\overrightarrow{MK}$ est orthogonal au plan (ACD). Le point K appartient au plan (ACD).

Donc K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

3.c. [MK] est la hauteur du tétraèdre MACD associée à la base ACD.

AC=5 et AD=3. Le triangle ACD est rectangle en A.

$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\times AC\times AD=\frac{1}{2}\times15=\frac{15}{2}$ unité d'aire.

MK=2 donc le volume du tétraèdre ACDM est égal à :

$V=\frac{1}{3}\times\frac{15}{2}\times2=5$ (unité de volume).

4. [DP] est la hauteur du tétraèdre ACDM associée à la base AMC.

Le triangle AMC est rectangle en M.

$A(0;0;0)$ $M(1;3;2)$ $C(5;3;0)$

$AM^2=(1-0)^2+(3-0)^2+(2-0)^2=1+9+4=14$ $AM=\sqrt{14}$

$CM^2=(1-5)^2+(3-3)^2+(2-0)^2=16+4=20$ $CM=\sqrt{20}$

$\mathcal{A}'=\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\sqrt{20}=\sqrt{14}\times\sqrt{5}=\sqrt{70}$.

$V=5=\frac{1}{3}\times\sqrt{70}\times DP \Leftrightarrow DP=\frac{3}{\sqrt{70}}=\frac{3\sqrt{70}}{70}$ $DP=1{,}8$ à 10^{-1} près.