## Exercice 1 7 points

**Sujet septembre**

*Le sujet propose 4 exercices.*
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
*Chaque exercice est noté sur 7 points ( le total sera ramené sur 20).*
*Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.*

**Thème: Probabilités**

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.
. La moitié des composants est conçue sur la chaînes °1 ;
. 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n°2 ;
. les composants restant sont conçus sur la chaîne n°3.
À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n°1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n°2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n°3.
On prélève au hasard un de ces composants. On note :
. $C_1$ l'événement « le composant provient de la chaîne n°1 » ;
. $C_2$ l'événement « le composant provient de la chaîne n°2 » ;
. $C_3$ l'événement « le composant provient de la chaîne n°3 ».
. D l'événement « le composant présente un défaut » et $\overline{D}$ son événement contraire.
*Dans tout l'exercice , les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à $10^{-4}$ si nécessaire.*

**Partie A**

**1.** Représenter cette situation par un arbre pondéré.
**2.** Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n°3 et soit défectueux.
**3.** Montre que la probabilité de l'événement D est $P(D)=0{,}0145$ .
**4.** Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n°3.

**Partie B**

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituant des lots de $n$ unités.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux dans ce lot.
Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p=0{,}0145$ .

**1.** Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n=20$ .
**1.a.** Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.
**1.b.** Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.
En déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux.

**2.** Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de $n$ composants soit supérieure à 0,85.
Il propose de former des lots de 11 composants au maximum. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

**Partie C**

Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°3.
Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant de cette entreprise.

## CORRECTION

### Partie A

**1.** La moitié des composants est conçue par la chaîne n°1 donc $P(C_1)=\frac{1}{2}=0{,}5$ .

. 30 % des composants sont conçus par la chaîne n°2 donc $P(C_2)=\frac{30}{100}=0{,}3$ .

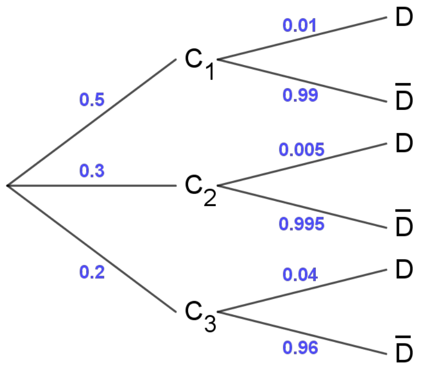
. Les composants restants sont conçus par la chaîne n°3 donc $P(C_3)=1-P(C_1)-P(C_2)=1-0{,}5-0{,}3=0{,}2$ .

. 1 % des pièces issues de la chaîne n°1 présentent un défaut donc :
$P_{C_1}(D)=\frac{1}{100}=0{,}01$ et $P_{C_1}(\bar{D})=1-P_{C_1}(D)=1-0{,}01=0{,}99$ .

. 0,5 % des pièces issues de la chaîne n°2 présentent un défaut donc :
$P_{C_2}(D)=\frac{0{,}05}{100}=0{,}005$ et $P_{C_2}(\bar{D})=1-P_{C_2}(D)=1-0{,}005=0{,}995$ .

. 4 % des pièces issues de la chaîne n°3 présentent un défaut donc :
$P_{C_3}(D)=\frac{4}{100}=0{,}04$ et $P_{C_3}(\bar{D})=1-P_{C_3}(D)=1-0{,}04=0{,}96$ .

. On obtient pour arbre pondéré représentant la situation :




**2.** $P(C_3\cap D)=P(C_3)\times P_{C_3}(D)=0{,}2\times 0{,}04=0{,}008$

**3.** En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(D)=P(C_1\cap D)+P(C_2\cap D)+P(C_3\cap D)$
$P(C_1\cap D)=P(C_1)\times P_{C_1}(D)=0{,}5\times 0{,}01=0{,}005$
$P(C_2\cap D)=P(C_2)\times P_{C_2}(D)=0{,}3\times 0{,}005=0{,}0015$
$P(D)=0{,}005+0{,}0015+0{,}008=0{,}0145$

**4.** $P_D(C_3)=\frac{P(D\cap C_3)}{P(D)}=\frac{0{,}008}{0{,}0145}=\frac{80}{145}=\frac{16}{29}\simeq 0{,}5517$

### Partie B

X suit la loi binomiale de paramètres : n=20 et p=0,0145.
Donc la probabilité de l'échec est $q=1-0{,}0145=0{,}9855$ .

**1.a.** $P(X=3)=\binom{20}{3}\times 0{,}0145^3\times 0{,}9855^{17}\simeq 0{,}0027$ .

**1.b.** $P(X=0)=0{,}9855^{20}\simeq 0{,}7467$

**1.c.** $P(X\geqslant 1)=1-0{,}9855^{20}\simeq 0{,}2533$

**2.** Pour un de lot de $n$ composants $(n \geqslant 1)$ la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux est égal à : $0{,}9855^n$.

On veut que : $0{,}9855^n > 0{,}85 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0{,}9855^n) > \ln(0{,}85)$

(car la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ )

$\Leftrightarrow \quad n \times \ln(0{,}9855) > \ln(0{,}85)$

( $0<0{,}9855<0$ donc $\ln(0{,}9855<0)$ )

$\Leftrightarrow \quad n < \dfrac{\ln(0{,}85)}{\ln(0{,}9855)} \simeq 11{,}13$

( $n$ est entier naturel)

$\Leftrightarrow \quad n \leqslant 11$ .

Le directeur a raison de former des lots de $11$ composants maximum.

**Partie C**

$Y$ est la variable aléatoire représentant le coût de fabrication d'un composant.
La loi de probabilité de $Y$ est donnée par le tableau suivant :

| $y_i$ | 15 | 12 | 9 |
|---|---|---|---|
| $P(Y=y_i)$ | 0.5 | 0.3 | 0.2 |

Le coût moyen de fabrication d'un composant est égal à E(Y).

$E(Y) = 15\times 0{,}5 + 12\times 0{,}3 + 9\times 0{,}2 = 7{,}5 + 3{,}6 + 1{,}8 = 12{,}9$ € .