Exercice 2 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Fonctions - Fonction logarithme

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=3x-x\ln(x)-2\ln(x)$.

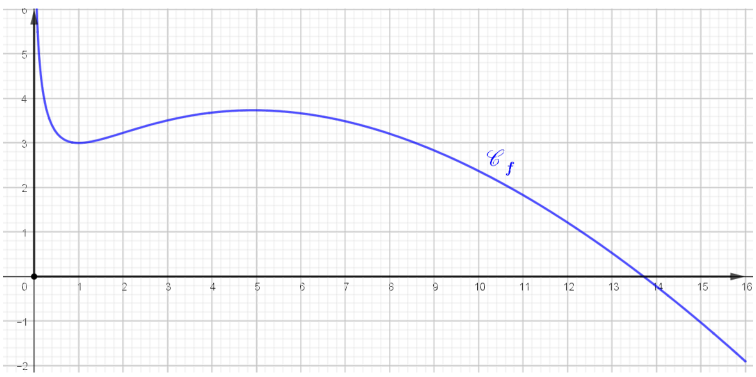
Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire g.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=2(x-1)-x\ln(x)$
On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x>0$, $g'(x)=1-\ln(x)$.
   En décuire le tableau de variations de g sur $]0:+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0;+\infty[$, 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[e;+\infty[$ .On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g' sur $]0;+\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction f.

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=3x-x\ln(x)-2\ln(x)$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-dessous.
On admet que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$, en justifiant votre démarche.

2.a. Justifier que pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

2.b. En déduire le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

3. On admet que, pour tout $x>0$, la dérivée seconde de f, notée f'' , est définie par : $f''(x)=\dfrac{2-x}{x^2}$.
   Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $g(x)=2(x-1)-x\ln(x)$.

$g(1)=2\times(1-1)-1\times\ln(1)=0$

$g(e)=2\times(e-1)-e\times\ln(e)=2e-2-e=e-2\simeq 0{,}72$

2. $\lim\limits_{x\to 0} 2\times(x-1)=-2$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$ (limite de cours) donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-2$.

3. $(x)'=1$ $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$ donc $(x\times\ln(x))'=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}=\ln(x)+1$ et $(2(x-1))'=2$.

$g'(x)=2-\ln(x)-1=1-\ln(x)$

$1-\ln(x)=0 \Leftrightarrow 1=\ln(x) \Leftrightarrow x=e$

$1-\ln(x)>0 \Leftrightarrow 1>\ln(x) \Leftrightarrow \ln(e)>\ln(x) \Leftrightarrow e>x>0$

$1-\ln(x)<0 \Leftrightarrow 1<\ln(x) \Leftrightarrow \ln(e)<\ln(x) \Leftrightarrow e<x$

(car la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$).

Tableau de variations de g

x	0		e		$+\infty$
g'(x)	‖		0		
g(x)	‖ -2	↗	e-2	↘	$-\infty$

4. g est dérivable et strictement croissante sur $]0;e]$ à valeurs dans $]-2;e-2]$.
$e-2>0$ donc $0\in]-2;e-2]$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0;e]$. Or $g(1)=0$ donc 1 est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$ dans l'intervalle $]0;e]$.

. g est dérivable et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty;e-2]$.
$0\in]-\infty;e-2]$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à $[e;+\infty[$.

. <u>Conclusion :</u>
L'équation $g(x)=0$ admet deux solutions distinctes 1 et α sur $]0;+\infty[$ avec $\alpha\in[2;+\infty[$.
En utilisant la calculatrice, on obtient : $4{,}92<\alpha<4{,}93$.

5. g' est strictement croissante sur $]0;e]$.
Si $0<x<1$ alors $g'(x)<g'(1)=0$.
Si $1<x\leqslant e$ alors $g'(1)=0<g'(x)$.
g' est strictement décroissante sur $[e;+\infty[$.
Si $e\leqslant x<\alpha$ alors $g'(x)>g'(\alpha)=0$
Si $\alpha<x$ alors $g'(\alpha)=0>g'(x)$
On donne le signe de g' sous la forme d'un tableau.

x	0		1		α		$+\infty$
g(x)	‖	−	0	+	0	−	

Partie B

1. Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$.

$f(x)=3x-x\ln(x)-2\ln(x)=x\left(3-\ln(x)-2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\ln(x))=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\ln(x)-2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

2.a. $f'(x)=3-\ln(x)-1-2\times\frac{1}{x}=2-\ln(x)-\frac{2}{x}=\frac{2x-x\ln(x)-2}{x}=\frac{2(x-1)-x\ln(x)}{x}=\frac{g(x)}{x}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2.b. On admet que : $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

$f(1)=3 \qquad f(\alpha)=M=3\alpha-\alpha\ln(\alpha)-2\ln(\alpha) \qquad M\simeq 3{,}73$

Tableau de variations de f

x	0		1		α		+∞
f '(x)	‖	–	0	+	0	–	
f(x)	‖ +∞	↘	3	↗	M	↘	-∞

3. On propose le calcul de la dérivée seconde de f (ce calcul n'est pas demandé).

$f'(x)=\frac{g(x)}{x} \qquad f''(x)=\frac{x\times g'(x)-g(x)}{x^2}=\frac{x\times(1-\ln(x))-2(x-1)+x\ln(x)}{x^2}=\frac{-x+2}{x^2}$

Le signe de $f''(x)$ est le signe de (2-x) sur $]0;+\infty[$.

x	0		2		+∞
2-x	‖	+	0	–	
convexité de f	‖	fonction convexe		fonction concave	

Le point d'abscisse 2 de $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion de la courbe.

$I(2;f(2)) \qquad f(2)=6-2\ln(2)-2\ln(2)=6-4\ln(2)\simeq 3{,}23$