Exercice 3 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Suites

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
De chaque année de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite d'étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année 2020+n.
On admet que pour tout entier n, $u_n \geqslant 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2000 individus, ainsi $u_0=2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence : $u_{n+1}=0{,}9\,u_n+100$.

2. Calculer u_1 et u_2 .

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1000<u_{n+1}\leqslant u_n$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-1000$
5.a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
5.b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=1000(1+0{,}9^n)$.
5.c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

6. On souhaite déterminer le nombre d'année nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (S>1000).
6.a. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant 1020$.
Justifier la réponse par un calcul.
6.b. Dans le programme Python ci-dessous, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.
Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

```
def population(S):
  n=0
  u=2000

  while . . . . . :
    u= . . . . .
    n= . . . . .
  return . . . . .
```

CORRECTION

1. Pendant l'année 2020+n la population diminue de 10 % soit $\frac{10}{100}u_n=0{,}1\,u_n$ et on réintroduit 100 individus dans la réserve à la fin de l'année 2020+n donc l'effectif de la population est :
$u_{n+1}=u_n-0{,}1\,u_n+100=0{,}9\,u_n+100$.

2. $u_1=0{,}9\,u_0+100=0{,}9\times 2000+100=1800+100=1900$
$u_2=0{,}9\times u_1+100=0{,}9\times 1900+100=0{,}9\times 1900+100=1710+100=1810$

3. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $1000<u_{n+1}\leqslant u_n$.

Initialisation

$u_0=2000$ $u_1=1900$ donc $1000<u_1\leqslant u_2$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $1000<u_{n+1}\leqslant u_n$ et on doit démontrer que $1000<u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$.

Si $1000<u_{n+1}\leqslant u_n$ alors $0{,}9\times 1000<0{,}9\times u_{n+1}\leqslant 0{,}9\times u_n$ (car 0,9>0) soit $900<0{,}9\,u_{n+1}\leqslant 0{,}9\,u_n$ et $900+100<0{,}9\,u_{n+1}+100\leqslant 0{,}9\,u_n+100$ $\Leftrightarrow$ $1000<u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $1000<u_{n+1}\leqslant u_n$.

4. Pour tout entier naturel n : $1000<u_{n+1}\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1000.
Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente.

5.a. Pour tout entier naturel n $v_n=u_n-1000$ $\Leftrightarrow$ $u_n=v_n+1000$
$v_{n+1}=u_{n+1}-1000=0{,}9\,u_n+100-1000=0{,}9\times(v_n+1000)-900=0{,}9\,v_n+900-900=0{,}9\,v_n$
donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

5.b. $v_0=u_0-1000=2000-1000=1000$.
Pour tout entier naturel n, $u_n=v_n+1000=1000\times 0{,}9^n+1000=1000\times(1+0{,}9^n)$.

5.c. $0<0{,}9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}9^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+0{,}9^n)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1000$.

6.a. $u_n\leqslant 1020$ $\Leftrightarrow$ $1000\times(1+0{,}9^n)\leqslant 1020$ $\Leftrightarrow$ $1+0{,}9^n\leqslant\frac{1020}{1000}=1{,}02$ $\Leftrightarrow$ $0{,}9^n\leqslant 1{,}02-1=0{,}02$

$\Leftrightarrow$ $\ln(0{,}9^n)\leqslant\ln(0{,}02)$ (car la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$)

$\Leftrightarrow$ $n\times\ln(0{,}9)\leqslant\ln(0{,}02)$ ($0<0{,}9<1$ donc $\ln(0{,}9)<0$)

$\Leftrightarrow$ $n\geqslant\frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}9)}$

$\frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}9)}\simeq 37{,}13$ et n est un entier naturel .

$\Leftrightarrow$ $n\geqslant 38$ Le plus petit entier naturel n tel que $u_n\leqslant 1020$ est : 38.

6.b.

```
def population(S):
    n=0
    u=2000

    while u≥S:
        u= 0.9*u+100
        n= n+1
    return n
```