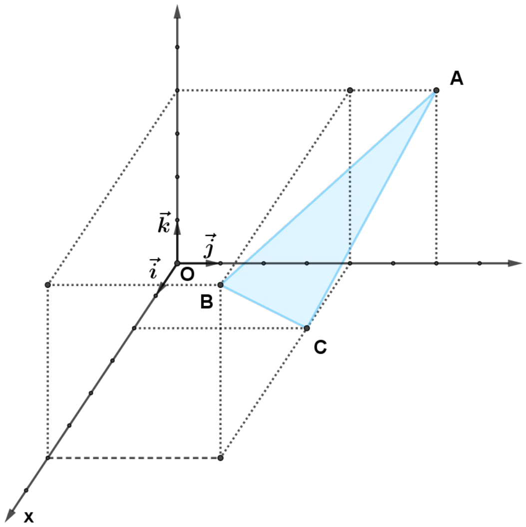
Exercice 4 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géométrie de l'espace

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. on considère les points :
$A(0;8;6)$; $B(6;4;4)$ et $C(2;4;0)$.



1.a. Justifier que les points A;B et C ne sont pas alignés.

1.b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

1.c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient D et E les points de coordonnées respectives (0;0;6) et (6;6;0).
2.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).
2.b. Montrer que le milieu I du segment [BC] appartient à la droite (DE).

3. On considère le triangle ABC.
3.a. Déterminer la nature du triangle ABC.
3.b. Calculer l'aire du triangle ABC, en unité d'aire.
3.c. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
3.d. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie à 0,1 degré.

4. On considère le point H de coordonnées $\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3};-\frac{5}{3}\right)$.
Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
En déduire la distance du point O au plan (ABC).

CORRECTION

1.a. $A(0;8;6)$ $B(6;4;4)$ $C(2;4;0)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$.

Il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

1.b. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires contenus dans le plan (ABC).

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1\times6+2\times(-4)+(-1)\times(-2)=6-8+2=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1\times2+2\times(-4)+(-1)\times(-6)=2-8+6=0$.

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

1.c. $M(x;y;z)$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-8\\z-6\end{pmatrix}$

$M\in(ABC)$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=1\times(x-0)+2\times(y-8)-1\times(z-6)=0$ $\Leftrightarrow$ $x+2y-z-16+6=0$

$\Leftrightarrow$ $x+2y-z-10=0$

2.a. $D(0;0;6)$ $E(6;6;0)$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}6\\6\\-6\end{pmatrix}$ $M(x;y;z)$ $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-6\end{pmatrix}$

$M\in(DE)$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{DM}=t.\overrightarrow{DE}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x-0=6t\\y-0=6t\\z-6=-6t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x=6t\\y=6t\\z=-6t+6\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

2.b. $I\left(\frac{6+2}{2};\frac{4+4}{2};\frac{4+0}{2}\right)$ $I(4;4;2)$

$\begin{cases}4=6t\\4=6t\\2=-6t+6\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\left\{t=\frac{2}{3}\right.$ donc $I\in(DE)$

3.a. $AB^2=6^2+(-4)^2+(-2)^2=36+16+4=56$ $AB=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$

$AC^2=2^2+(-4)^2+(-6)^2=4+16+36=56$ $AC=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$

$BC^2=(2-6)^2+(4-4)^2+(0-4)^2=16+0+16=32$ $BC=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$AB=AC\neq BC$ et $AB^2+AC^2\neq BC^2$.

Donc le triangle ABC est isocèle en A.

3.b. $I(4;4;2)$ est le milieu de [BC] donc [AI] est la médiane du triangle isocèle ABC et [AI] est aussi la hauteur issue de A.

$A(0;8;6)$ et $E(4;4;2)$

$AI^2=(4-0)^2+(4-8)^2+(2-6)^2=16+16+16=48$ $AI=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

L'aire du triangle ABC, en uité d'aire, est égale à :

$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\times BC\times AI=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{3}=8\sqrt{6}$ en unité d'aire.

3.c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6\times2+(-4)\times(-4)+(-2)\times(-6)=12+16+12=40$

3.d. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ $\Leftrightarrow$ $40=\sqrt{56}\times\sqrt{56}\times\cos(\widehat{BAC})$

$\Leftrightarrow$ $\cos(\widehat{BAC})=\frac{40}{56}=\frac{5}{7}$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$\widehat{BAC}=44{,}4°$ à $0{,}1$ près.

4. $H\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3};-\frac{5}{3}\right)$ et (ABC): $x+2y-z-10=0$.

Or $\frac{5}{3}+2\times\frac{10}{3}\times\left(-\frac{5}{3}\right)-10=\frac{5+20+5}{3}-10=\frac{30}{3}-10=0$ donc $H\in(ABC)$.

On remarque : $\overrightarrow{OH}=\frac{5}{3}.\vec{n}$ donc (OH) est orthogonale au plan (ABC) et H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

La distance du point O au plan (ABC) est la longueur OH.

$$OH^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25+100+25}{9}=\frac{150}{9}$$

$$OH=\sqrt{\frac{150}{9}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$$