Exercice 1 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Fonctions - Suites

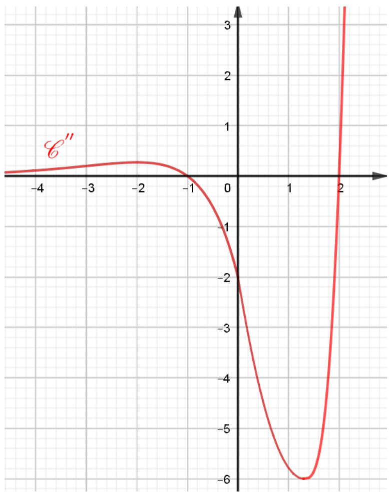
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre questions est exacte. Les six questions sont indépendantes.
Une réponde incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}$.

La courbe représentative de la fonction g admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

a. x=2 **b.** y=2 **c.** y=0 **d.** x=-1

2. On considère la fonction g définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
On désigne par f'' la fonction dérivée seconde de f .
On a représenté sur le graphique ci-dessous la courbe de f'' notée $\mathscr{C}''$.



a. $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion **b.** f est convexe sur l'intervalle [-1;2]
c. f est convexe sur $]-\infty;-1]$ et sur $[2;+\infty[$ **d.** f est convexe sur $\mathbb{R}$

3. On donne la suite $u_0=0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$.

La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n=u_n-2$, est :

a. arithmétique de raison -2 **b.** géométrique de raison -2
c. arithmétique de raison 1 **d.** géométrique de raison $\frac{1}{2}$

4. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$1+\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2-\frac{n}{n+1}$$

On peut affirmer que la suite (u_n) :

a. converge vers 2 **b.** converge vers 1
b. diverge vers $+\infty$ **d.** n'a pas de limite

5. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x^2\ln(x)$.
Une primitive F de f sur $]0;+\infty[$ est définie par :

a. $F(x)=\frac{1}{3}x^3\left(\ln(x)-\frac{1}{3}\right)$ **b.** $F(x)=\frac{1}{3}x^3(\ln(x)-1)$

c. $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ **d.** $F(x)=\frac{1}{3}x^2(\ln(x)-1)$

6. Pour tout réel x, l'expression : $2+\frac{3e^{-x}-5}{e^{-x}+1}$ est égale à :

a. $\frac{5-3e^x}{1+e^x}$ **b.** $\frac{5+3e^x}{1-e^x}$

c. $\frac{5+3e^x}{1+e^x}$ **c.** $\frac{5-3e^x}{1-e^x}$

CORRECTION

1. Réponse : b

Preuve non demandée

$$g(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}=\frac{2(e^x+1)-2}{e^x+1}=2-\frac{2}{e^x+1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{e^x+1}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$.

La droite d'équation $y=2$ est une asymptote à la courbe représentative de g en $+\infty$.

2. Réponse : c

Preuve non demandée

Par lecture graphique, on détermine le signe de $f''(x)$ et la convexité de f.

x	0		-1		2		$+\infty$
f "(x)		+	0	−	0	+	
Convexité de f		convexe		concave		convexe	

Et les points d'abscisses -1 et 2 de $\mathscr{C}$ sont des points d'inflexion.

3. Réponse : d

Preuve non demandée

Pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-2 \Leftrightarrow u_n=v_n+2$.

Et $v_{n+1}=u_{n+1}-2=\frac{1}{2}u_n-1+2=\frac{1}{2}(v_n+2)-1=\frac{1}{2}v_n+1-1=\frac{1}{2}v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

4. Réponse : b

Preuve non demandée

$v_n=1+\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad w_n=2-\frac{n}{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, $v_n\leqslant u_n\leqslant w_n$

$0<\frac{1}{4}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1$

$w_n=2-\frac{n+1-1}{n+1}=2-1+\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1} \qquad \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=1$

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

5. Réponse : a

Preuve non demandée

$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2 \qquad \left(\ln(x)-\frac{1}{3}\right)'=\frac{1}{x}$

$$F_a'(x)=x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}x^3\times\frac{1}{x}=x^2\ln(x)-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x^2=x^2\ln(x)=f(x)$$

6. Réponse : a

Preuve non demandée

$$2+\frac{3e^{-x}-5}{e^{-x}+1}=2+\frac{e^x\times(3e^{-x}-5)}{e^x\times(e^{-x}+1)}=2+\frac{3e^0-5e^x}{e^0+e^x}=2+\frac{3-5e^x}{1+e^x}=\frac{2+2e^x+3-5e^x}{1+e^x}=\frac{5-3e^x}{1+e^x}$$