Exercice 2 — 7 points

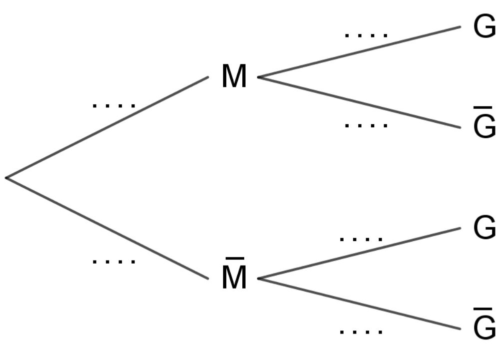
Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Probabilités

Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte.
Une étude a montré que 70 % des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée 60 % visitent la grotte.
Cette étude montre aussi que 6 % des clients de l'hôtel ne font aucune visite.
On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :
. M l'événement : « le client visite le musée » ;
. G l'événement : « le client visite la grotte ».
On note $\bar{M}$ l'événement contraire de M, et $\bar{G}$ l'événement contraire de G et pour tout événement E on note $P(E)$ la probabilité de E.
Ainsi, d'après l'énoncé on a : $P(\bar{M}\cap\bar{G})=0{,}06$.

1.a. Vérifier que $P_{\bar{M}}(\bar{G})=0{,}2$, où $P_{\bar{M}}(\bar{G})$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant que le client ne visite pas le musée.
1.b. L'arbre pondéré ci-dessous modélise la situation. Recopier et compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.



1.c. Quelle est la probabilité de l'événement : « le client visite la grotte et ne visite pas le musée ».
1.d. Montrer que $P(G)=0{,}66$.

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?

3. Les tarifs pour les visites sont les suivants.
. Visite du musée : 12 euros.
. Visite de la grotte : 5 euros.
On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.
3.a. Donner la loi de probabilité de T.
Présenter les résultats sous la forme d'un tableau.
3.b. Calculer l'espérance mathématique de T.

3.c. Pour des raisons de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour.

4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance mathématique de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de la visite au musée qui demeure à 12 euros.
Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ?
On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites.

5. On choisit au hasard 100 clients de l'hôtel, en assimilant ce choix à un tirage avec remise.
Quelle est la probabilité qu'au moins les trois quarts de ces clients aient visité la grotte à l'occasion de leur séjour à l'hôtel ?
On donnera une valeur du résultat à 10^{-3} près.

CORRECTION

1.a. 70 % des clients de l'hôtel visitent le musée donc :

$P(M)=\frac{70}{100}=0,7 \qquad P(\bar{M})=1-P(M)=1-0,7=0,3$

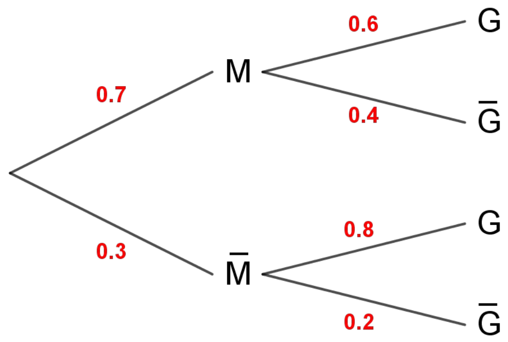
$P(\bar{M}\cap\bar{G})=0,06=P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(G)=0,3\times P_{\bar{M}}(\bar{G})$ donc $P_{\bar{M}}(\bar{G})=\frac{0,06}{0,3}=0,2$.

1.b. Parmi les clients visitant le musée 60 % visitent la grotte donc :

$P_M(G)=\frac{60}{100}=0,6$ et $P_M(\bar{G})=1-P_M(G)=1-0,6=0,4$

. $P_{\bar{M}}(\bar{G})=0,2$ et $P_{\bar{M}}(G)=1-P_{\bar{M}}(\bar{G})=1-0,2=0,8$

. On obtient pour arbre pondéré modélisant la situation



1.c. $P(\bar{M}\cap G)=P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(G)=0,3\times 0,8=0,24$

1.d. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(G)=P(M\cap G)+P(\bar{M}\cap G)$

$P(M\cap G)=P(M)\times P_M(G)=0,7\times 0,6=0,42$

$P(G)=0,42+0,24=0,66$

2. $P_G(M)=\frac{P(M\cap G)}{P(G)}=\frac{0,42}{0,66}=\frac{42}{66}=\frac{7}{11}\simeq 0,636>0,5$

Donc l'affirmation du responsable de l'hôtel est exacte.

3.a. Les valeurs de l'univers image sont : 0 ; 5 ; 12 ; et 17.

$P(T=0)=P(\bar{M}\cap\bar{G})=0,06$

$P(T=5)=P(\bar{M}\cap G)=0,24$

$P(T=12)=P(M\cap\bar{G})=0,28$

$P(T=17)=P(M\cap G)=0,42$

On donne la loi de probabilité de T sous la forme d'un tableau.

t_i	0	5	12	17
$P(T=t_i)$	0.06	0.24	0.28	0.42

3.b. $E(T)=0\times 0,06+5\times 0,24+12\times 0,28+17\times 0,42=1,2+3,36+7,14=11,7$

3.c. $11,7\times k\geqslant 700 \quad\Leftrightarrow\quad k\geqslant\frac{700}{11,7}\simeq 59,83 \quad\Leftrightarrow\quad k\geqslant 60$ (car k est un entier naturel).

Il faut au moins 60 clients en moyenne par jour pour obtenir une recette supérieure ou égale à 700 euros par jour.

4. Soit T_1 la nouvelle variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour les visites.
Les valeurs de l'univers image : 0 ; x ; 12 ; 12+x où x est un nombre réel positif.
La loi de probabilité de T_1 est la même loi de probabilité que T.
$E(T_1)=0\times0{,}06+0{,}24\,x+12\times0{,}28+(12+x)\times0{,}42=0{,}24\,x+3{,}36+5{,}04+0{,}42\,x=0{,}66\,x+8{,}40$

On veut $E(T_1)=15 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}66\,x+8{,}40=15 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}66\,x=6{,}60 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{6{,}60}{0{,}66}=10$.

Pour atteindre l'objectif il faut fixer le prix de la visite à la grotte à 10 €.

5. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On choisit au hasard un client de l'hôtel
succès S : « le client visite la grotte »
la probabilité de succès est $p=P(S)=P(G)=0{,}66$
échec $\overline{S}$: « le client ne visite pas la grotte »
la probabilité de l'échec est $q=1-p=1-0{,}66=0{,}34$
On choisit au hasard 100 clients de l'hôtel, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
On effectue donc 100 épreuves indépendantes, la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 100 épreuves suit la loi binomiale de paramètres n=100 et p=0,66.
On nous demande de calculer $P(X\geqslant75)$.
En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(X\geqslant75)=0{,}034$ à 10^{-3} près.