Exercice 3 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Fonctions logarithme et exponentielle - Suites

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

2.a. Montrer que, pour tout nombre réel $x\geqslant 1$, $f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

2.b. Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	1		e		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	

2.c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

3. Soit k un nombre réel positif ou nul.

3.a. Montrer que, si $0\leqslant k\leqslant\frac{1}{e}$, l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique sur l'intervalle [1;e].

3.b. Si $k>\frac{1}{e}$, l'équation $f(x)=k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1;+\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{\frac{x}{4}}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=e^{\frac{u_n}{4}}$ c'est à dire : $u_{n+1}=g(u_n)$.

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant e$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note L la limite de la suite (u_n) et on admet que L est solution de l'équation : $e^{\frac{x}{4}}=x$.

4. En déduire que L est solution de l'équation $f(x)=\frac{1}{4}$ où f est la fonction étudiée dans la partie A.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite L de la suite (u_n)

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0$ (résultat de cours) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2.a. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$ $\quad f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

$u(x)=\ln(x) \quad u'(x)=\frac{1}{x} \quad v(x)=x \quad v'(x)=1$

$u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)=\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1=1-\ln(x)$

$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

2.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;+\infty[$, $x^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de 1-ln(x).

$x\in[1;+\infty[$

$1-\ln(x)=0 \Leftrightarrow 1=\ln(x) \Leftrightarrow \ln(e)=\ln(x) \Leftrightarrow x=e$

$1-\ln(x)<0 \Leftrightarrow 1<\ln(x) \Leftrightarrow \ln(e)<\ln(x) \Leftrightarrow e<x$

(car ln est une fonction strictement croissante sur $]0:+\infty[$)

$1-\ln(x)>0 \Leftrightarrow 1>\ln(x) \Leftrightarrow \ln(e)>\ln(x) \Leftrightarrow e>x\geqslant 1$.

On a justifié le tableau de signe de $f'(x)$.

2.c. $f(1)=\frac{\ln(1)}{1} \qquad f(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}$

On peut dresser le tableau de variations complet de f.

x	1		e		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	
f(x)	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

3.a. f est dérivable et strictement croissante sur $[1;e]$ à valeurs dans $\left[0;\frac{1}{e}\right]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que pour tout nombre réel k de l'intervalle $\left[0;\frac{1}{e}\right]$, l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique appartenant à $[1;e]$.

3.b. f admet un maximum absolu en e égal à $\frac{1}{e}$ c'est à dire pour tout nombre réel x de $[1;+\infty[$, on a :

$f(x)\leqslant\frac{1}{e}$ donc l'équation $f(x)=k$ avec $k>\frac{1}{e}$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

Partie B

1. Pour tout nombre réel x $g(x)=e^{\frac{x}{4}}$.

$(e^u)'=u'\times e^u \quad u(x)=\frac{x}{4} \quad u'(x)=\frac{1}{4} \quad g'(x)=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}>0$

donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant e$.

Initialisation

$u_0 = 1 \qquad u_1 = e^{\frac{1}{4}} \simeq 1{,}28 > 1$ et $1{,}28 < e$.

Donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant e$ et la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant e$ et on doit démontrer que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant e$.

Si $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant e$ alors $g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(e)$ car g est croissante sur $\mathbb{R}$.

$g(u_n) = u_{n+1} \qquad g(u_{n+1}) = u_{n+2} \qquad g(e) = e^{\frac{e}{4}} \simeq 1{,}44 \leqslant e$

donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant e$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant e$.

3. Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant e$ donc la suite (u_n) est majorée par e.
Toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

On admet que L est solution de l'équation $e^{\frac{x}{4}} = x$.

4. $e^{\frac{L}{4}} = L \iff \ln\left(e^{\frac{L}{4}}\right) = \ln(L) \iff \frac{L}{4} = \ln(L) \iff \frac{1}{4} = \frac{\ln(L)}{L} \iff \frac{1}{4} = f(L)$.

5. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$f(1{,}42) \simeq 0{,}2469 \qquad f(1{,}43) \simeq 0{,}2501$

$f(1{,}42) \leqslant f(L) = \frac{1}{4} \leqslant f(1{,}43)$ donc $1{,}42 \leqslant L \leqslant 1{,}43$ (f est croissante sur $[1;e]$).

$L = 1{,}43$ à 10^{-2} près.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés