Exercice 4 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géométrie de l'espace

Dans l'espace rapporté à une repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points :
$A(-1;-1:3)$ $B(1;1;2)$ $C(1;-1;7)$.
On considère la droite Δ passant par les points $D(-1;6;8)$ et $E(11;-9;2)$.

1.a. Vérifier que la droite Δ pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x=-1+4t \\ y=6-5t \\ z=8-2t \end{cases} \quad \text{avec} \quad t\in\mathbb{R}$$
1.b. Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.
1.c. Le point $F(1{,}36;-1{,}7;-0{,}7)$ appartient-il à la droite Δ' ?

2.a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2.b. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).
2.c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x-5y-2z+5=0$.

3.a. Montrer que le point $G(7;-4;4)$ appartient à la droite Δ.
3.b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de G sur le plan (ABC).
3.c. En déduire la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.

4.a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
4.b. Calculer le volume V du tétraèdre ABCG.

On rappelle que le volume V *d'un tétraèdre est donné par la formule* $V=\frac{1}{3}\times B\times h$ *où* B *est l'aire d'une base et* h *la hauteur correspondant à cette base.*

CORRECTION

1.a. La représentation paramétrique donnée est une représentation paramétrique de la droite passant par le point $D(-1;6;8)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$, cette droite est la droite $\Delta=(DE)$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$.

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}12\\-15\\-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE}=3\vec{v}$. On a bien une représentation paramétrique de la droite Δ.

1.b. Δ' est la parallèle à Δ passant par l'origine $O(0;0;0)$ donc Δ' est la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Δ' : $\begin{cases}x=4k\\y=-5k\\z=-2k\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

1.c. $F(1{,}36;-1{,}7;-0{,}7)$

Le point F appartient à la droite Δ' si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\begin{cases}1{,}36=4k\\-1{,}7=-5k\\-0{,}7=-2k\end{cases}$.

$1{,}36=4k \Leftrightarrow k=\dfrac{1{,}36}{4}=0{,}34$ $\quad -1{,}7=-4k \Leftrightarrow k=\dfrac{1{,}7}{5}=0{,}34$ $\quad -0{,}7=-2k \Leftrightarrow k=\dfrac{0{,}7}{2}=0{,}35$

$0{,}35\neq 0{,}34$ donc le point F n'appartient pas à Δ'.

2.a. Les points A ; B et C déterminent un plan si et seulement si les points A, B et C ne sont pas alignés c'est à dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}2=2a\\2=0\times a\\-1=4a\end{cases}$. Il n'existe pas de nombre réel a tel que $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{AC}$ donc les points A, B et C déterminent un plan.

2.b. La droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) par exemples les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}=12\times2-15\times2-6\times(-1)=24-30+6=0$

$\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AC}=12\times2-15\times0-6\times4=0$

Donc Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

2.c. $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$M(x;y;z)$ $\quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z-3\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}12\\-15\\-6\end{pmatrix}$

$M\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 12\times(x+1)-15\times(y+1)-6\times(z-3)=0 \Leftrightarrow$
$12x+12-15y-15-6z+18=0 \Leftrightarrow 12x-15y-6z+15=0 \Leftrightarrow 4x-5y-2z+5=0$

3.a. $G(7;-4;4)$

$\begin{cases}7=-1+4t\\-4=6-5t\\4=8-2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4t=8\\5t=10\\2t=4\end{cases} \Leftrightarrow \{t=2$ donc G appartient à la droite Δ.

3.b. Le projeté orthogonal H du point G sur le plan (ABC) est le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
On résout le système suivant :

$$\begin{cases} 4x-5y-2z+5=0 \\ x=-1+4t \\ y=6-5t \\ z=8-2t \end{cases}$$

On obtient :

$4\times(-1+4t)-5\times(6-5t)-2\times(8-2t)+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad -4+16t-30+25t-16+4t+5=0$

$\Leftrightarrow \quad 45t-45=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=1$

$x=-1+4=3 \qquad y=6-5=1 \qquad z=8-2=6 \qquad H(3;1;6)$

3.c. La distance du point G au plan (ABC) est égal à GH.

$GH^2=(3-7)^2+(1+4)^2+(6-4)^2=16+25+4=45$

$GH=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

4.a. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\times2+2\times0+(-1)\times4=4-4=0$.

Le triangle ABC est rectangle en A.

4.b. L'aire du triangle ABC (en unité d'aire) est égale à : $\frac{1}{2}\times AB\times AC$.

$AB^2=2^2+2^2+(-1)^2=4+4+1=9 \qquad AB=3$

$AC^2=2^2+0^2+4^2=4+16=20 \qquad AC=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\frac{1}{2}\times AB\times AC=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

La hauteur du tétraèdre ABCG relative à la base ABC est égale à $GH=3\sqrt{5}$.

Le volume du tétraèdre ABCG est égal à : $V=\frac{1}{3}\times3\sqrt{5}\times3\sqrt{5}=3\times5=15$ en unité d' aire.