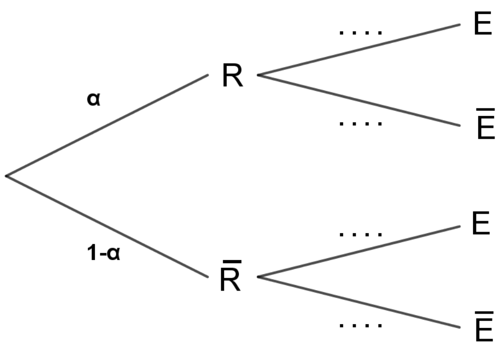
Exercice 1 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Probabilités

Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route on bien vélos tout terrain.
Chaque type de vélo peut-être loué dans sa version électrique ou non.
On choisit un client du magasin au hasard et on admet que :
. Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce vélo soit un vélo électrique est de 0,4 ;
. Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce vélo soit un vélo électrique est de 0,7 ;
. La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.
On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0\leqslant\alpha\leqslant1$.
On considère les événements suivants :
. R : « le client loue un vélo de route » ;
. E : « le client loue un vélo électrique » ;
. $\overline{R}$ et $\overline{E}$ **,** événements contraires de R et E.
Si F est un événement on notera $P(F)$ la probabilité de F.
On modélise cette situation aléatoire à l'aide de l'arbre reproduit ci-dessous :



loue1. Recopier cet arbre sur la copie et le compléter.

2.a. Montrer que $P(E)=0{,}7-0{,}3\alpha$.
2.b. En déduire que $\alpha=0{,}4$.

3. Quelle est la probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique ?

4. On sait que le client loue un vélo électrique. Déterminer la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain. On donnera le résultat arrondi au centième.

5. Le prix de location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros.
Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de la location à la journée de 15 euros.
On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de la location d'un vélo à la journée.
5.a. Donner la loi de probabilité de X. On présentera les résultats sous forme de tableau.
5.b. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
On note Y la variable aléatoire associant à chaque échantillon de 30 clients choisis qui loue un vélo électrique.
On rappelle que la probabilité de l'événement E est $P(E)=0,58$.

6.a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

6.b. Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique.
On donnera le résultat arrondi au millième.

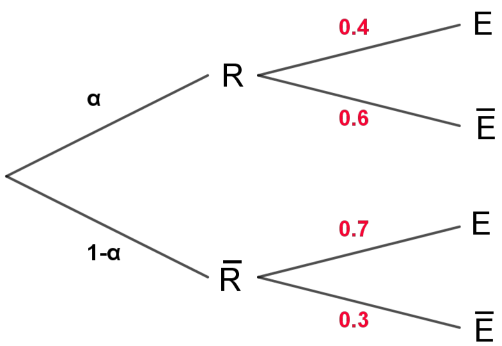
6.c. Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique.
On donnera le résultat arrondi au millième.

CORRECTION

1. Si le client loue un de route, la probabilité que ce vélo soit électrique est de 0,4 donc :
$P_R(E)=0{,}4$ et $P_R(\bar{E})=1-P_R(E)=1-0{,}4=0{,}6$.

. Si le client loue un vélo tout terrain, le probabilité que ce vélo sont électrique est de 0,7 donc :
$P_{\bar{R}}(E)=0{,}7$ et $P_{\bar{R}}(\bar{E})=1-P_{\bar{R}}(E)=1-0{,}7=0{,}3$

. Arbre pondéré modélisant la situation



2.a. En utilisant la formule des probabilités totales.
$P(E)=P(R\cap E)+P(\bar{R}\cap E)$
$P(R\cap E)=P(R)\times P_R(E)=\alpha\times 0{,}4=0{,}4\alpha$
$P(\bar{R}\cap E)=P(\bar{R})\times P_{\bar{R}}(E)=(1-\alpha)\times 0{,}7=0{,}7-0{,}7\alpha$
$P(E)=0{,}4\alpha+0{,}7-0{,}7\alpha=0{,}7-0{,}3\alpha$

2.b. Or P(E)=0,58 donc :

$$0{,}58=0{,}7-0{,}3\alpha \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}3\alpha=0{,}7-0{,}58=0{,}12 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}3\alpha=0{,}12 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\frac{0{,}12}{0{,}3}=0{,}4$$

3. On nous demande de calculer : $P(\bar{R}\cap E)$
$P(\bar{R}\cap E)=P(\bar{R})\times P_{\bar{R}}(E)=0{,}6\times 0{,}7=0{,}42$

4. On nous demande de calculer : $P_E(\bar{R})$
$P_E(\bar{R})=\dfrac{P(\bar{R}\cap E)}{P(E)}=\dfrac{0{,}42}{0{,}58}=\dfrac{42}{58}=\dfrac{21}{29}=0{,}72$ arrondi au centième.

5.a. Les valeurs de l'univers image de X sont : 25 ; 35 ; 40 ; 50.
$P(X=25)=P(R\cap\bar{E})P(R)\times P_R(\bar{E})=0{,}4\times 0{,}6=0{,}24$
$P(X=35)=P(\bar{R}\cap\bar{E})=P(\bar{R})\times P_{\bar{R}}(\bar{E})=0{,}6\times 0{,}3=0{,}18$
$P(X=40)=P(R\cap E)=P(R)\times P_R(E)=0{,}4\times 0{,}4=0{,}16$
$P(X=50)=P(\bar{R}\cap E)=P(\bar{R})\times P_{\bar{R}}(E)=0{,}6\times 0{,}7=0{,}42$
On donne la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

x_i	25	35	40	50
$P(X=x_i)$	0.24	0.18	0.16	0.42

5.b. $E(X)=0{,}24\times 25+0{,}18\times 35+0{,}16\times 40+0{,}42\times 50$
$E(X)=6+6{,}3+6{,}4+21=39{,}7$
La dépense moyenne en une journée de chaque client d'Hugo est : 39,7 €.

6.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On choisit au hasard un client d'Hugo
succès S : « le client loue un vélo électrique »
la probabilité de succès est : $p=P(S)=P(E)=0{,}58$

échec $\bar{S}$: « le client loue un vélo non électrique »
la probabilité de l'échec est : $q=P(\bar{S})=1-0,58=0,42$.
On choisit au hasard 30 clients d'Hugo, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
C'est à dire on effectue 30 épreuves indépendantes et la variable aléatoire Y égale au nombre de succès en 30 épreuves suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0,58$.

6.b. $P(Y=20)=\binom{30}{20}\times 0,58^{20}\times 0,42^{10}=0,095$ arrondi au millième.

Calcul effectué à la calculatrice.

6.c. $P(Y\geqslant 15)=0,858$ arrondi au millième.

Calcul effectué à la calculatrice.