Exercice 3 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Fonction logarithme - Suites

Les parties B et C sont indépendantes.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-x\ln(x)$
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
3.a. Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a : $f'(x)=-\ln(x)$.
3.b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie , on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=0{,}5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n-u_n\ln(u_n)$.
Ainsi pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0{,}5;1]$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0{,}5\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.
2.a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2.b. On note L la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de L .

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f_k(x)=kx-x\ln(x)$.

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k=e^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k, on a : $x_k=y_k$.

CORRECTION

Partie A

1. $x \in]0;+\infty[$ $\quad f(x)=x-x\ln(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

2. $f(x)=x-x\ln(x)=x(1-\ln(x))$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (1-\ln(x))=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

3.a. $f'(x)=1-\left(1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right)=1-\ln(x)-1=-\ln(x)$

3.b. $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=0=\ln(1) \Leftrightarrow x=1$

. $f'(x)>0 \Leftrightarrow -\ln(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x)<0=\ln(1) \Leftrightarrow 0<x<1$

Car ln est une fonction strictrment croissante sur $]0;+\infty[$

f est strictement croissante sur]0;1[.

. $f'(x)<0 \Leftrightarrow -\ln(x)<0 \Leftrightarrow \ln(x)>0=\ln(1) \Leftrightarrow x>1$

f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

Tableau de variations de f

x	0		1		+∞
f '(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	1	↘	-∞

$f(1)=1-1\times\ln(1)=1$

4. $x \in]0;+\infty[$

$f(x)=x \Leftrightarrow x-x\ln(x)=x \Leftrightarrow 0=x\ln(x) \Leftrightarrow 0=\ln(x) \Leftrightarrow \ln(1)=\ln(x) \Leftrightarrow x=1$

Partie B

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0,\leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

. Initialisation

$u_0=0,5 \quad u_1=f(u_0)=0,5-0,5\times\ln(0,5)\simeq 0,85$ donc $0,5\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1$.

Donc la propriété est vérifiée pour n=0.

. Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier n, on suppose que $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$ et on doit démontrer que $0,5\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$.

Si $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$ alors $f(0,5)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant 1$ car f est croissante sur $]0;+\infty[$.

Or $f(0,5)\simeq 0,85\geqslant 0,5$ et $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(1)=1$.

Donc $0,5\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

. Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

2.a. Pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est convergente.

Pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant 1$ donc la suite (u_n) est majorée 1.

Toute suite croissante et majorée est convergente.

Donc la suite (u_n) est convergente.

2.b. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$.

Pour tout entier naturel n, on a $f(u_n)=u_{n+1}$ donc $f(L)=L$ et 1 est solution de l'équation $f(x)=x$ donc $L=1$.

Partie C

1. Pour tout nombre réel k et pour tout nombre réel strictement positif x :

$f_k(x)=kx-x\ln(x)$

f_k est dérivable sur $]0;+\infty[$

$f'_k(x)=k-\left(1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right)=k-\ln(x)-1=k-1-\ln(x)$

$(k-1)-\ln(x)=0 \Leftrightarrow k-1=\ln(x) \Leftrightarrow \ln(e^{k-1})=\ln(x) \Leftrightarrow e^{k-1}=x$

$(k-1)-\ln(x)>0 \Leftrightarrow k-1>\ln(x) \Leftrightarrow \ln(e^{k-1})>\ln(x) \Leftrightarrow e^{k-1}>x>0$

f_k est croissante sur $]0;e^{k-1}]$

$(k-1)-\ln(x)<0 \Leftrightarrow k-1<\ln(x) \Leftrightarrow \ln(e^{k-1})<\ln(x) \Leftrightarrow e^{k-1}<x$

f_k est décroissante sur $[e^{k-1};+\infty[$

<u>Conclusion</u>

f_k admet un maximum pour $x_k=e^{k-1}$.

2. $y_k=k\,e^{k-1}-e^{k-1}\ln(e^{k-1})=k\,e^{k-1}-(k-1)e^{k-1}=e^{k-1}$.

Donc $x_k=y_k$