Exercice 4 — 7 points

Sujet septembre

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géométrie de l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère :

. la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A(2;4;0)$ et dont un vecteur directeur est : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;

. la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=3\\ y=3+t\\ z=3+t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

1.a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}\,'$ de la droite $\mathscr{D}'$.
1.b. Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.
1.c. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.
On admet dans la suite de cet exercice dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M' le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.
On se propose de déterminer la distance appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant $\mathscr{D}$ et Δ, c'est à dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

3.b. En déduire qu'une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x-y-5z=0$.
3.c. On rappelle que M' est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.
Justifier que M' est également le point de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.
En déduire les coordonnées du point M' sont (3;1;1).
4.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
4.b. Justifier que le point M a pour coordonnées (1;2;0).
4.c. Calculer la distance MM'.

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x=5t\\ y=2+5t\\ z=1+t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

5.a. Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
On note ℓ la distance d d'un point N de la droite d au plan $\mathscr{P}$.
Exprimer le volume du tétraèdre ANMM' en fonction de ℓ.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\frac{1}{3}\times B\times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

5.c. Justifier que N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d, les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.

CORRECTION

1.a. Les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ sont données par les coefficients du paramètre t dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}'$: $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

1.b. $\vec{u}\neq\vec{0}$ donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u}\,'=k\vec{u}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}0=1\times k\\1=2\times k\\1=0\times k\end{cases}$ ce ssystème n'admet pas de solution donc les deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

1.c. $\mathscr{D}$ est la droite passant par $A(2;4;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$.
H(x;y;z) appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement s'il existe un nombre réel h tel que : $\overrightarrow{AH}=h\vec{u}$.

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-0\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\begin{cases}x-1=1\times h\\y-2=2\times h\\z-0=0\times h\end{cases}$ $h\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x=h+1\\y=2h+2\\z=0\end{cases}$ $h\in\mathbb{R}$

2. Δ est perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$ donc $\vec{v}$ doit être orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{u}\,'$.

$\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{u}\,'\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{v}.\vec{u}=2\times1+(-1)\times2+1\times0=2-2=0$
$\vec{v}.\vec{u}\,'=2\times0+(-1)\times1+1\times1=-1+1=0$
$\vec{v}$ est un vecteur directeur de toute droite orthogonale à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ.

3. Les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes en M, il existe donc un unique plan $\mathscr{P}$ contenant $\mathscr{D}$ et Δ.

3.a. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires (non nuls et orthogonaux) donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\vec{u}=2\times1+(-1)\times2+(-5)\times0=2-2=0$
$\vec{n}.\vec{v}=2\times2+(-1)\times(-1)+(-5)\times1=4+1-5=0$
donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

3.b. A appartient au plan $\mathscr{P}$.
K(x;y;z) appartient au plan $\mathscr{P}$ si seulement si $\overrightarrow{AK}.\vec{n}=0$

$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}x-2\\y-4\\z-0\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AK}.\vec{n}=(x-2)\times2+(y-4)\times(-1)+(z-0)\times(-5)=2x-4-y+4-5z=2x-y-5z$
K(x;y;z) appartient au plan à $\mathscr{P}$ si et seulement si $2x-y-5z=0$.

3.c. M' est le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et Δ donc M' appartient à $\mathscr{P}$ qui est contenue dans $\mathscr{P}$ et M' appartient à $\mathscr{P}$.
Si la droite $\mathscr{D}'$ était contenue dans $\mathscr{P}$ alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ seraient parallèles (deux droites coplanaires perpendiculaires à une même troisième Δ sont parallèles).
On a démontré que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles donc $\mathscr{D}'$ est sécante au plan $\mathscr{P}$ et M' est le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{P}$.

4.a. On résout le système :

$$\begin{cases} 2x-y-5z=0 \\ x=3 \\ y=3+t \\ z=3+t \end{cases}$$

On obtient : $2\times3-(3+t)-5\times(3+t)=0 \Leftrightarrow 6-3-t-15-5t=0 \Leftrightarrow -12-6t=0 \Leftrightarrow t=-2$

$x=3$; $y=3-2=1$; $z=3-2=1$ $\quad M'(3;1;1)$

4.b. Δ est la droite passant par $M'(3;1;1)$ et de vecteur directeur : $\vec{n}$.

On obtient pour rp.epréprésentation paramétrique de Δ : $\begin{cases} x=2l+3 \\ y=-l+1 \\ z=-5l+1 \end{cases}$ $\quad l\in\mathbb{R}$.

4.c. $M(1;2;0)$ $\quad M'(3;1;1)$

$MM'^2=(3-1)^2+(1-2)^2+(1-2)^2=4+1+1=6$ $\qquad MM'=\sqrt{6}$

5.a. d est la droite passant par $C(0;2;1)$ et de vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}$.

d est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ (vecteur normal à $\mathscr{P}$).

$\vec{n}.\vec{w}=2\times5+(-1)\times5+(-5)\times1=10-5-5=0$ donc d est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

5.b. Si Q est le projeté orthogonal de N sur $\mathscr{P}$ alors $NQ=\ell$.

Dans le tétraèdre ANMM', on considère la base AMM' contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

Le triangle AMM' est rectangle en M car $\mathscr{D}$=(AM) et Δ =(MM') et $\mathscr{D}$ et Δ sont perpendiculaires.

$M(1;2;0)$ $\quad A(2;4;0)$

$AM^2=(1-2)^2+(4-2)^2+(0-0)^2=1+4+0=5$ $\qquad AM=\sqrt{5}$

B est l'aire du triangle AMM' en unité d'aire.

$B=\frac{1}{2}\times AM\times MM'=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{30}}{2}$.

La hauteur du tétraèdre relative à cette base est $NQ=\ell$.

Le volume du tétraèdre ANMM' est : $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{30}}{2}\times\ell=\frac{\sqrt{30}}{6}\times\ell$ (en nuité de volume).

5.c. Q_1 est le projeté orthogonal de N_1 sur $\mathscr{P}$.

Q_2 est le projeté orthogonal de N_2 sur $\mathscr{P}$.

Le quadrilatère $N_1N_2Q_1Q_2$ est un rectangle donc $N_1Q_1=N_2Q_2$.

N_1Q_1 est la hauteur du tétraèdre AN_1MM' relative à la base AMM'.

N_2Q_2 est la hauteur du tétraèdre AN_2MM' relative à la base AMM'.

Donc $V_1=V_2$