## Exercice 1 7 points

**Sujet septembre**

*Le sujet propose 4 exercices.*
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et* ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
*Chaque exercice est noté sur 7 points ( le total sera ramené sur 20).*
*Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.*

**Thème: Probabilités**

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.
Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :
. lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
. lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.
Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à $10^{-4}$ près si nécessaire.

**Partie 1**

Un patient, atteint d'angine et ayant subi le test, est choisi au hasard.
On considère les événements suivants :
. A : « le patient est atteint d'une angine nécessitent la prise d'antibiotiques » ;
. T : « le test est positif » ;
. $\bar{A}$ et $\bar{T}$ sont les événements contraires respectivement de A et T.

**1.** Calculer $P(A\cap T)$ . On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
**2.** Démontrer que $P(T)=0{,}2625$ .
**3.** On choisit un patient ayant un test positif.
Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
**4.a.** Parmi les événements suivants, déterminer ceux qui correspondant à un résultat erroné du test :
$A\cap T$ , $\bar{A}\cap T$ , $A\cap\bar{T}$ , $A\cap\bar{T}$ .
**4.b.** On définit l'événement E : « le test fournit un résultat erroné ».
Démontrer que $P(E)=0{,}0625$ .

**Partie 2**

On sélectionne au hasard un échantillon de $n$ patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à tirage avec remise.
On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

**1**. On suppose que $n=50$ .
**1.a.** Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n=50 et p=0,0625.
**1.b.** Calculer $P(X=7)$ .
**1.c.** Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
**2.** Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X\geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95 ?

## CORRECTION

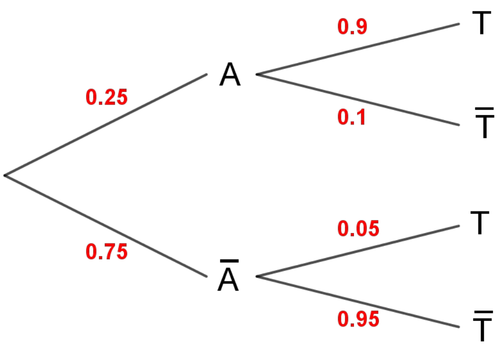
**Partie 1**

**1.** Un quart des angines nécessite la prise d'antibiotiques donc $P(A)=\frac{1}{4}=0{,}25$ et $P(\bar{A})=1-0{,}25=0{,}75$ .

. Lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques alors le test est positif dans 90 % des cas, donc :
$P_A(T)=\frac{90}{100}=0{,}9$ et $P_A(\bar{T})=1-0{,}9=0{,}1$ .

. Lorsque l'angine ne nécessite pas de prise d'antibiotiques alors le test est négatif dans 95 % des cas, donc :
$P_{\bar{A}}(\bar{T})=\frac{95}{100}=0{,}95$ et $P_{\bar{A}}(T)=1-0{,}95=0{,}05$ .

. Arbre pondéré décrivant la situation.




$P(A\cap T)=P(A)\times P_A(T)=0{,}25\times 0{,}9=0{,}225$ .

**2.** En utilisant la formule des probabilités totales.
$P(T)=P(A\cap T)+P(\bar{A}\cap T)$
$P(\bar{A}\cap T)=(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(T)=0{,}75\times 0{,}05=0{,}0375$
$P(T)=0{,}225+0{,}0375=0{,}2625$

**3.** On nous demande de calculer $P_T(A)$ .
$P_T(A)=\frac{P(A\cap T)}{P(T)}=\frac{0{,}225}{0{,}2625}=\frac{6}{7}=0{,}8571$ à$10^{-4}$ près.

**4.a.** Les deux événements qui correspondent a un résultat erroné sont : $\bar{A}\cap T$ et $A\cap\bar{T}$ .

**4.b.** Les deux événements précédents sont incompatibles, donc :
$P(E)=P[(\bar{A}\cap T)\cup(A\cap\bar{T})]=P(\bar{A}\cap T)+P(A\cap\bar{T})$
$P(\bar{A}\cap T)=0{,}0375$
$P(A\cap\bar{T})=0{,}25\times 0{,}1=0{,}025$
$P(E)=0{,}0375+0{,}025=0{,}0625$ .

**Partie 2**

**1.a.** On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
on choisit au hasard un patient atteint d'une angine et ayant subi le test.
Succès $S$ : « le résultat du test est erroné » la probabilité de succès est $p=0{,}0625$ .
Échec $\bar{S}$ : « le résultat du test n'est pas erroné » la probabilité de l'échec est $q=1-0{,}0625=0{,}9375$ .
Le choix de l'échantillon de 50 patients est assimilé à un tirage avec remise c'est à dire on réalise 50 épreuves indépendantes.
$X$ est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 50 épreuves, sa loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0{,}0625$

**1.b.** $P(X=7)=\binom{50}{7}\times 0{,}0625^7\times 0{,}9375^{43}\simeq 0{,}0232$ à $10^{-4}$ près.

**1.c.** $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)1-0{,}9375^{50}\simeq 0{,}9603$ à $10^{-4}$ près.

**2.** La taille de l'échantillon est $n \geqslant 1$, la loi de probabilité de $X$ est la loi binomiale de paramètres . $n$ et $p=0{,}0625$ .

$P(X \geqslant 10) \geqslant 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad 1-P(X<10) \geqslant 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}05 \geqslant P(X \leqslant 9)$ .

On peut répondre à la question en utilisant la calculatrice par balayage.

Pour $n=247$ $P(X \leqslant 9) \simeq 0{,}0514$

Pour $n=248$ $P(X \leqslant 9) \simeq 0{,}0498$

La valeur minimale de $n$ telle que $P(X \geqslant 10) \geqslant 0{,}95$ est : 248.

Remarque

On propose une méthode ( ***non demandée*** ) pour démontrer le résultat.

Dans la suite, on pose $p=0{,}0625$ et $q=0{,}9375$ .

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 et tout entier naturel $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ on a :

$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ ( propriété de Pascal )

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1.

$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = 1$

On note $X_{n+1}$ la variable aléatoire égale au nombre de succès pour un échantillon de taille $(n+1)$ et $X_n$ pour un échantillon de taille $n$.

On se propose de comparer $P(X_{n+1} \leqslant 9)$ et $P(X_n \leqslant 9)$ .

$$\binom{n+1}{0} p^0 q^{n+1} = q \binom{n}{0} p^0 q^n$$

$$\binom{n+1}{1} p^1 q^n = q \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + p \binom{n}{0} p^0 q^n$$

$$\binom{n+1}{2} p^2 q^{n-1} = q \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + p \binom{n}{1} p^1 q^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n+1}{9} p^9 q^{n-8} = q \binom{n}{9} p^9 q^{n-9} + p \binom{n}{8} p^8 q^{n-8}$$

On effectue la somme membre à membre de ces dix égalités et on obtient :

$$P(X_{n+1} \leqslant 9) = q\,P(X_n \leqslant 9) + p\,P(X_n \leqslant 9) - p \binom{n}{9} p^9 q^{n-9}$$

$$P(X_{n+1} \leqslant 9) = (p+q) P(X_n \leqslant 9) - \binom{n}{9} p^{10} q^{n-9}$$

Or $p+q=1$

$$P(X_{n+1} \leqslant 9) = P(X_n \leqslant 9) - \binom{n}{9} p^{10} q^{n-9}$$

On démontre alors que la suite $(P(X_n \leqslant 9))$ est décroissante.

On a aussi $P(X_9 \leqslant 9)=1$ .

D'autre part, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 9 :

$$\binom{n+1}{9} = \frac{(n+1)!}{9!(n-8)!} = \frac{n!}{9!(n-9)!} \times \frac{n+1}{n-8} = \binom{n}{9} \times \frac{n+1}{n-8} = \binom{n}{9} \times \frac{n+1}{(n+1)-9}$$

On a aussi $\binom{9}{9} = 1$ et on convient que : $0!=1$ .

Pour déterminer la valeur minimale de $n$ telle que $P(X_n \geqslant 10) \geqslant 0{,}95$ , on propose d'exécuter le programme écrit en langage Python.

```
n=9
A=1
R=1
p=0.0625
q=0.9375
while R>=0.05:
  n=n+1
  A=A*n/(n-8)
  R=R-A*p**10*q**(n-9)
return n
print(n)
```

Si exécute le programme, on obtient : **248**